

# Modélisation des moteurs BrushLess

## Préambule

Ce document a pour but d'expliquer le fonctionnement des moteurs Brushless, leur modélisation et leur commande, dans le cadres des systèmes asservis.

Il a été écrit pour les professeurs ayant une culture scientifique solide dans les champs de la **mécanique**, et qui souhaitent élargir leur culture vers les domaines de l'électrotechnique, de la commande numérique et des asservissements de machines. Ainsi, les prérequis sont supposés acquis concernant le calcul vectoriel et complexe, mais très modestes en électro-technique (quelques notions d'électricité sur les circuits RLC, la modélisation d'une MCC) : les modèles nécessaires en magnétisme sont expliqués depuis leurs fondamentaux. Un maximum d'analogies avec la mécanique seront proposées. Un mécanicien devrait ainsi être capable de discuter avec un spécialiste d'électrotechnique.

Le document n'a pas l'ambition d'être exhaustif, ni de constituer un état de l'art sur le sujet. Les phénomènes y sont décrits de façon simple et pédagogique, afin d'en comprendre les principes, en éliminant volontairement les phénomènes marginaux (pertes, hystérésis, saturations, etc) qui auraient nui à la clarté du propos. Il est bien évident qu'une modélisation complète d'une machine synchrone destinée à son dimensionnement doit prendre en compte ces phénomènes. Les modèles développés n'ont donc pas pour objectif le dimensionnement de la machine synchrone elle-même, mais plutôt d'en établir un modèle simple qui soit utilisable au sein d'un modèle plus global d'asservissement du processus dans lequel la machine est intégrée.

Ainsi, après la lecture de ce document, le lecteur devrait raisonnablement être capable :

- d'expliquer le fonctionnement d'un moteur brushless,
- de discuter des phénomènes couplés électriques, magnétiques et mécaniques, et leurs grandeurs associées,
- de proposer un modèle simple de type schéma bloc en sachant expliquer et quantifier chacune des constantes du modèle à partir des phénomènes physiques élémentaires,
- d'identifier le rapport entre les grandeurs du schéma bloc et les grandeurs sinusoïdales au sein du moteur,
- de savoir tracer un diagramme de Fresnel en connaissance de cause,
- d'expliquer les différents types de commande et leur implantation dans un micro-contrôleur.

Le plan s'organise suivant une approche progressive des phénomènes et de la machine. Le premier chapitre décrit de façon qualitative le fonctionnement d'un moteur brushless, en expliquant les détails des représentations « classiques » pour un électro-techniciens. Le deuxième chapitre

expose les modèles physiques élémentaires concernant le magnétisme, et converge vers une modélisation des couplages magnétiques dans le moteur brushless. Le troisième chapitre développe la modélisation complète des moteurs brushless de type BLDC, ainsi que leur commande par commutation à 6 phases. Le quatrième chapitre développe la modélisation de la machine synchrone sinusoïdale auto-pilotée, dans le cadre de l'hypothèse des régimes stationnaires, équilibrés et linéaires, où toutes les grandeurs sont parfaitement sinusoïdales.

## Introduction

Le moteur « brushless », moteur sans balais, tire son nom par opposition au moteur à courant continu qui dispose de bobinages sur le rotor et nécessite un collecteur pour alimenter ces bobinages. Ce collecteur est un point faible du moteur à courant continu : pertes énergétiques (mécaniques et électriques), usure, étincelles, etc.

Historiquement, le moteur à courant continu est prisé pour les applications nécessitant un réglage de la vitesse ou du couple, tandis que les moteurs asynchrones sont utilisés pour les applications à forte puissance, vitesse constante et nécessitant des moteurs robustes. Les champs d'applications des différents moteurs s'élargissent progressivement grâce aux innovations sur l'électronique de puissance et les puissances de calcul, qui permettent de contrôler le courant de façon très flexible.

La machine synchrone, incapable de démarrer seule sur une source de courant alternative, est depuis longtemps utilisée uniquement comme génératrice. Avec l'apparition d'onduleurs à fréquence variable, elle est désormais utilisée comme moteur. Sa proximité de comportement et de fonctionnement (en remplaçant la commutation par collecteur par une commutation électronique) avec le moteur à courant continu conduisent à l'appeler « moteur à courant continu sans balais » : Brushless.

Les moteurs brushless ont beaucoup d'avantages par rapport au moteur à courant continu : l'absence de balais conduit à de meilleures performances énergétiques et une meilleure fiabilité. Les bobinages étant sur le stator, l'évacuation de la chaleur est plus facile et l'inertie est réduite (les bobinages de cuivre sur le rotor des moteurs à courant continus sont très lourds), ce qui améliore encore les performances énergétiques dans les applications nécessitant des accélérations et décélérations. Le rapport poids/puissance est meilleur et le coût des commandes électroniques triphasées est désormais inférieur au coût d'un collecteur. Pour les applications pointues, la commande de machine synchrone permet de contrôler précisément le champ magnétique dans la machine, et ainsi le couple généré, bien mieux que sur un moteur à courant continu. Aussi, le moteur brushless remplace progressivement le moteur à courant continu dans certains champs d'application, en particulier lorsque la masse ou la vitesse de rotation sont des critères importants.

Dans les enseignements d'ingénierie, le moteur à courant continu tient toujours une bonne place et il la gardera. La modélisation de la machine à courant continu permet de comprendre les phénomènes électriques, magnétiques et mécaniques sur un cas simple et représentatif. L'intérêt pédagogique est indéniable et jusqu'à présent, les matériels de TP utilisent essentiellement ce type de moteur. Par ailleurs, les moteurs brushless peuvent, sous certaines conditions simplificatrices, être modélisés par un moteur à courant continu équivalent.

La réalité technologique ne doit cependant pas être ignorée : les applications modernes mettent en œuvre des moteurs brushless et il sera de plus en plus difficile d'en faire abstraction. Cette technologie, déjà au programme des TSI depuis longtemps, est entrée au programme de physique en PSI en 1995 et au programme de SI en PT en 2013. Il est fort probable que ces notions d'électrotechnique se généralisent dans les cours, ainsi que dans les travaux pratiques. Quelle que soit la spécialité d'origine, les professeurs de sciences et techniques industrielles ont tout intérêt à rester en veille technologique et à s'appropriier les connaissances utiles à propos des moteurs brushless.

# 1 Principe de fonctionnement des moteurs brushless

Un moteur Brushless entre dans la catégorie des machines alternatives synchrones. La figure 1 montre une classification des machines électriques. Le premier niveau distingue la machine à courant continu (bien connue des professeurs de CPGE...) et les machines alternatives. Le moteur universel est un cas particulier de moteur fonctionnant aussi bien (ou aussi mal pourrait-on dire) sur courant continu que sur courant alternatif.

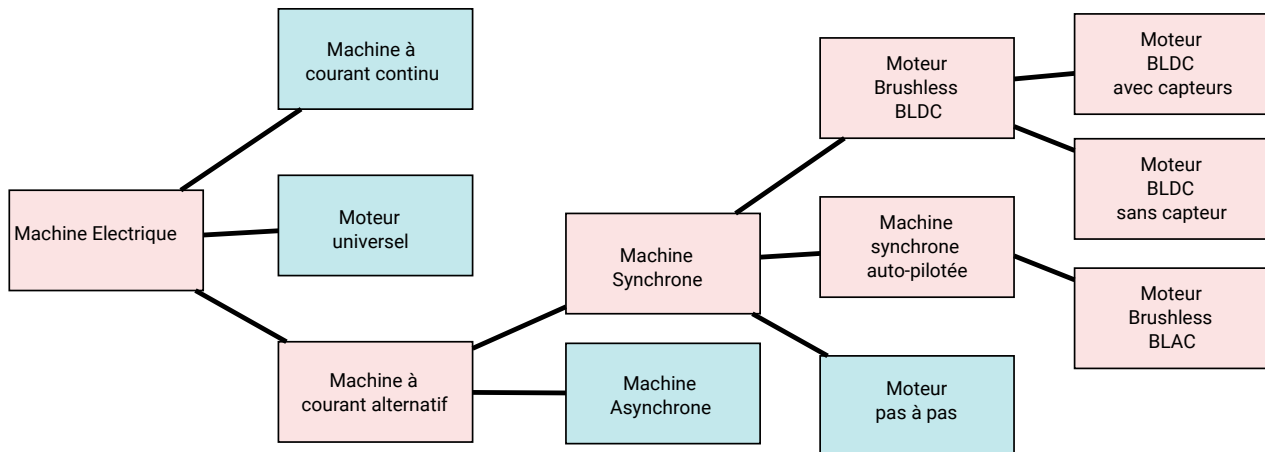


Figure1: Classification des moteurs électriques

Parmi les machines alternatives, le second niveau distingue les machines synchrones et asynchrones. Parmi les machines synchrones, la machine synchrone auto-pilotée correspond au moteur brushless à commande sinusoïdale (BLAC, Brushless Alternative Current), tandis que le moteur BLDC (BrushLess Direct Current) correspond à un moteur brushless à commande en créneau.

Dans le cas du BLCD, la commutation peut être commandée à partir d'une mesure par capteurs à effet Hall à 6 points par tour, ou encore à partir d'une mesure de force contre-électromotrice (moteurs dits sans capteurs : « sensorless »).

Dans le cas du BLAC, il est nécessaire d'avoir une bien meilleure résolution (de l'ordre de 4000 pts par tour, par un synchro-résolveur), ce qui implique un coût et une complexité supplémentaire.

## 1.1 Fonctionnement

Le moteur brushless fonctionne à partir de trois sources de tensions variables, fournies par un onduleur, et permettant de générer un champ magnétique tournant. Le rotor, généralement équipé d'un aimant permanent, tend à suivre le champ magnétique tournant. La figure 2 montre l'architecture du moteur et de son onduleur.

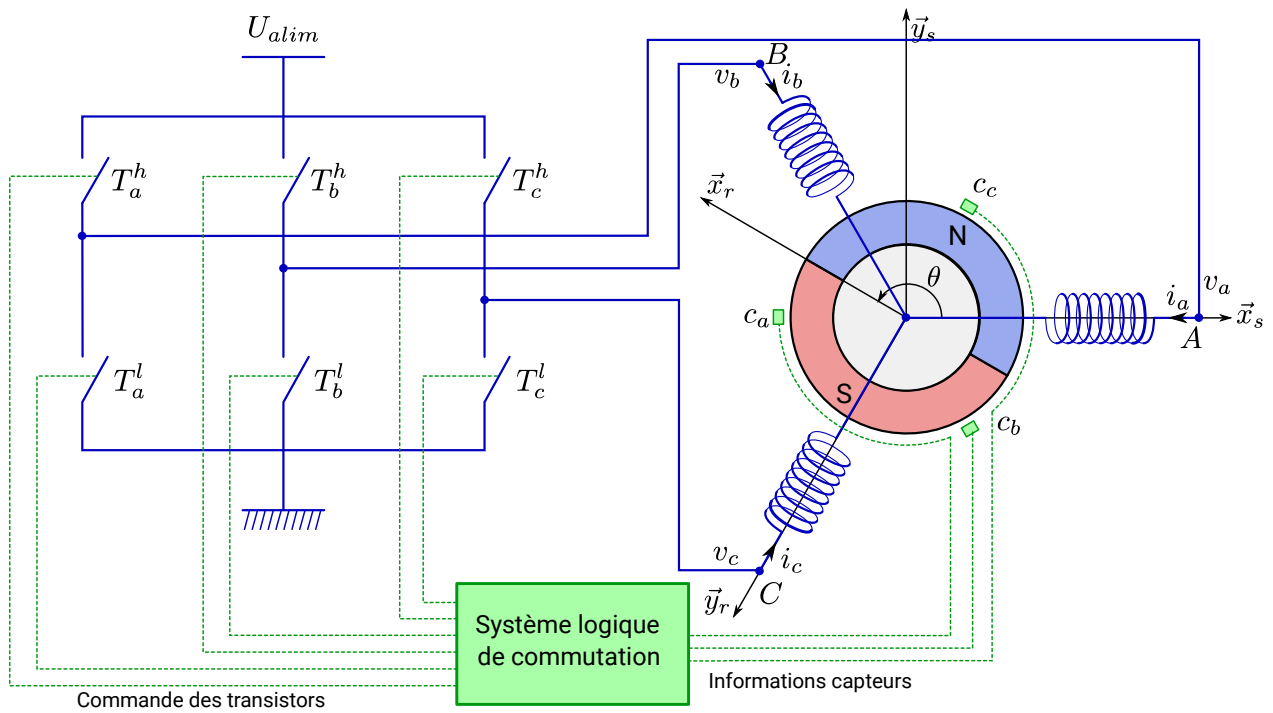


Figure 2: Fonctionnement de l'onduleur et du moteur brushless

Dans le cas simple du moteur BLDC, à chaque commutation, deux phases sont reliées respectivement à la tension d'alimentation et à la masse, et une phase n'est pas connectée. Prenons l'exemple de la figure 3, la phase A n'est pas reliée, la phase B est reliée à la tension d'alimentation et la phase C est reliée à la masse. Un courant parcourt les bobines de B vers C et génère un champ magnétique statorique  $\vec{B}_s$  dans le moteur dirigé suivant  $\vec{y}_s$ . Le rotor supporte un aimant dont le moment magnétique  $\vec{m}$ , orienté du sud vers le nord, tend à s'aligner avec le champ magnétique statorique en tournant dans le sens trigonométrique.

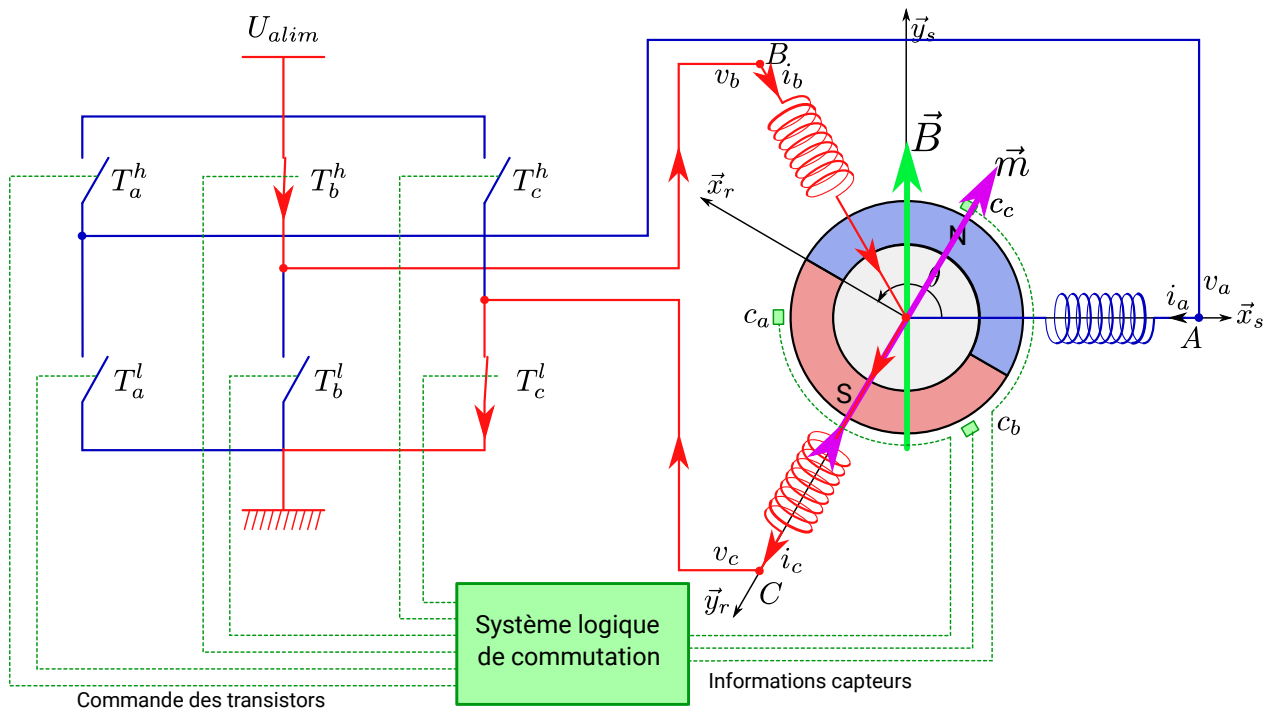


Figure 3: Exemple de situation de commutation

Dès que le rotor s'approchera de  $\vec{y}_s$ , la commutation sera modifiée pour faire circuler le courant de B vers A, le champ magnétique statorique  $\vec{B}$  tourne de  $\frac{\pi}{6}$ , de façon à attirer le rotor et poursuivre la rotation dans le sens trigonométrique. L'angle entre  $\vec{m}$  et  $\vec{B}$  conduit à un couple magnétique  $\vec{C}_m = \vec{m} \wedge \vec{B}$ .

## 1.2 Architecture et représentation

Selon les critères de puissance, d'encombrement, ou de qualité, les bobinages des moteurs sont différents. Deux architectures se trouvent couramment : l'organisation des bobinages répartis sur plusieurs encoches (figure 4, photo de gauche, sur les moteurs relativement puissants) ou au contraire des bobines isolées sur une encoche (photo de droite, sur les petits moteurs à bas coût). La représentation figure 2 s'approche de la photo de droite.



Figure 4: Bobinages de différents moteurs

Les électrotechniciens utilisent cependant d'autres modes de représentation, plus conforme à l'organisation de la photo de gauche, où les bobinages apparaissent dans le plan sous la forme de deux conducteurs normaux au plan. Ainsi sur la figure 5, le bobinage A d'axe horizontal suivant  $\vec{x}_s$  est représenté par un conducteur en haut, orienté par une normale sortante, et un conducteur en bas, orienté par une normale rentrante, le tout formant une boucle de normale  $\vec{x}_s$  autour du rotor.

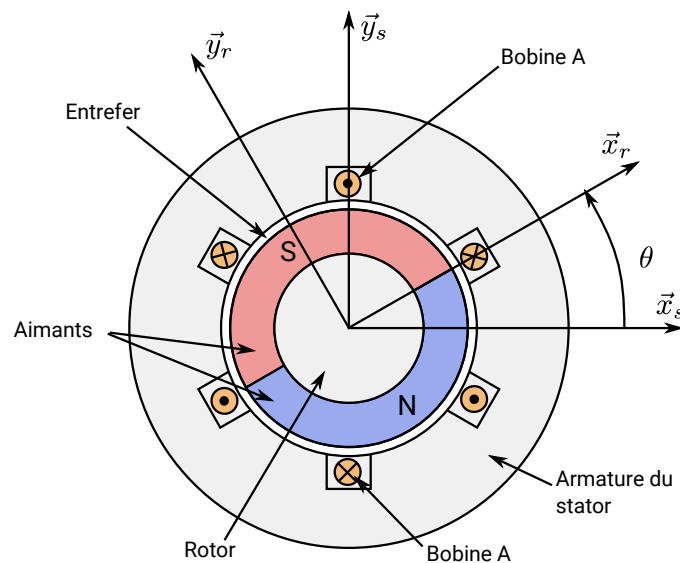


Figure 5: Représentation des bobinages par les conducteurs

Sur les moteurs brushless, les bobinages sont toujours sur le stator. Le rotor est en général constitué d'un aimant permanent, mais il peut aussi prendre la forme d'un électro-aimant, alimenté en courant continu, qui nécessite alors des balais pour être alimenté.

Dans la situation courante où le stator est l'armature métallique externe, le moteur est dit « in-runner » : le rotor est placé à l'intérieur du stator. C'est le cas de la photo de gauche. Il existe néanmoins une autre architecture consistant à placer le stator à l'intérieur (avec les bobinages) et à faire tourner une couronne d'aimants. Le moteur est dit « out-runner » car la partie extérieure

du moteur est tournante. C'est le cas de la photo de droite.

### 1.3 Machines multi-pôlaires

La figure 2 utilisée pour expliquer le fonctionnement ne considère que 3 bobines et un aimant à deux pôles (nord et sud), soit une unique paire de pôles. Mais comme le montre les photographies, il y a généralement plus de bobines et plus d'aimants.

Le principe de fonctionnement reste inchangé car les bobines sont reliées en série de façon à ce qu'il y ait toujours 3 phases et un neutre commun. Le nombre de bobines est donc toujours un multiple de trois. Les aimants quant à eux forment une alternance de pôles nord et sud si bien que si on note  $p$  le *nombre de paires de pôles*, il y a  $p$  périodes magnétiques pour 1 tour de l'arbre.

Le nombre de paires de pôles est déterminant pour les relations cinématiques entre la fréquence électrique des signaux et la fréquence de rotation de l'arbre : une période électrique conduit à évoluer d'une période magnétique. Il faut donc  $p$  période électrique pour assurer un tour de l'arbre. Si l'onduleur produit des courants alternatifs à la pulsation  $\omega_e$ , alors la vitesse mécanique de rotation de l'arbre  $\omega_m$  sera égale à :  $\omega_m = \omega_e / p$ .

Le nombre de bobines n'influe pas directement sur cette relation cinématique. Augmenter le nombre de pôles agit comme un réducteur de vitesse (et permet parfois de s'en affranchir).

Concernant la modélisation, il est commode de ne travailler que sur une machine à 3 bobines et 1 paire de pôles. C'est ce qui sera développé par la suite. Le propos ne perd aucune généralité en considérant que les angles utilisés sont des angles électriques  $\theta_e$  et qu'il faut diviser par  $p$  pour obtenir l'angle mécanique  $\theta_m$  du rotor : un tour sur le modèle correspond en réalité à une période magnétique.



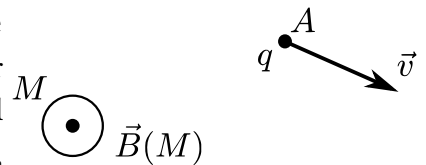
## 2 Modélisation des phénomènes magnétiques

Cette partie vise à expliquer les phénomènes magnétiques et leurs modèles en couvrant le juste nécessaire pour traiter complètement le cas de la machine synchrone.

### 2.1 Le champ magnétique et ses propriétés

Les phénomènes magnétiques, ou plus généralement électro-magnétiques, sont liés aux déplacements de charges dans l'espace. Le champ  $E$  et le champ  $B$  sont ainsi indissociables. Le champ électrique  $E$ , dans nos applications, sera concentré dans les conducteurs électriques. Le champ magnétique  $B$ , dans nos applications, sera concentré dans les armatures ferromagnétiques, conductrices du champ magnétique. L'interaction électromagnétique est l'une des quatre interactions physiques, avec les deux interactions nucléaires et l'interaction gravitationnelle.

La loi de Biot et Savart (donnée à titre d'information) donne une expression élémentaire du champ  $B$  en un point  $M$  créé par une charge  $q$  située en  $A$  et de vitesse  $\vec{v}$ , et montre qu'il dépend directement des charges en mouvement, de leurs vitesses, ainsi que de la distance au point  $M$  considéré :



$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q \vec{v} \wedge \vec{MA}}{\|\vec{MA}\|^3}$$

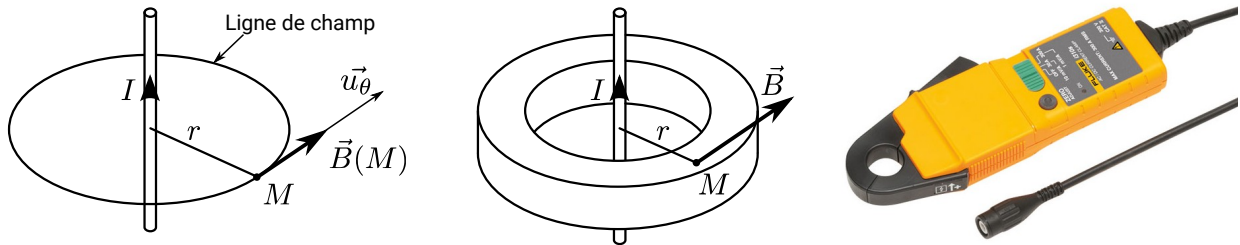
La constante  $\mu_0$  est la *perméabilité magnétique* du vide (celle de l'air est quasi-identique), caractérisant la capacité du milieu à laisser passer le champ magnétique. C'est l'analogue de la conductance électrique pour les matériaux conducteurs.  $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ H/m}$ . Pour des matériaux significativement différents du vide, on note  $\mu$  leur perméabilité magnétique, ou on utilise la *perméabilité relative*  $\mu_r$  telle que  $\mu = \mu_0 \mu_r$ . Pour le fer,  $\mu_r \simeq 10^4$ , c'est-à-dire qu'il est 10 000 fois plus perméable que le vide (ou l'air). Par contre, les aimants sont de mauvais conducteurs magnétiques, avec des perméabilités relatives de 1 à 3.

Intégrée le long d'un fil conducteur (conducteur de charges...) où circule une intensité  $I$ , la loi de Biot et Savart permet de calculer le champ magnétique autour du fil :

$$\vec{B}(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \vec{u}_\theta$$

Ce champ est orthoradial et tourne autour du fil. La figure ci-dessous montre une ligne de champ. Si on place un tore de ferrite, c'est-à-dire un matériau ferro-magnétique qui a la bonne propriété d'être très bon conducteur du champ magnétique, il va agir comme un *tube de champ* ; le champ  $B$  sera très supérieur dans le tore par rapport à sa valeur hors du tore. En effet, l'air est un mauvais conducteur du champ  $B$  tandis que le fer par exemple présente une perméabilité magnétique 10 000 fois supérieure. Pour faire une analogie mécanique, il faut imaginer le champ

$B$  comme la vitesse d'un fluide tournant autour de l'axe du fil, dans un milieu poreux (du sable ou une éponge). La présence d'un tore de ferrite agit comme s'il y avait une cavité creuse en forme de tore dans le sable, permettant au fluide de circuler librement. La vitesse dans le fluide sera bien supérieure dans le tore par rapport à celle dans le sable et l'essentiel du débit (dont l'analogie magnétique s'appelle le *flux magnétique*) se situera dans le tore.



Le tube de champ guide les lignes de champs et les génératrices du tube sont tangentes au champ, si bien que le flux circulant dans le tube est constant pour toutes les sections.

Ce phénomène est largement utilisé par les sondes de courant (ou pince ampèremétrique), qui permettent de mesurer un courant sans branchement électrique, simplement en entourant le fil conducteur avec la pince. Celle-ci forme un tore de ferrite canalisant l'essentiel du champ magnétique et un capteur à effet Hall situé dans le tore permet de mesurer le champ magnétique, directement proportionnel à l'intensité circulant dans le fil.

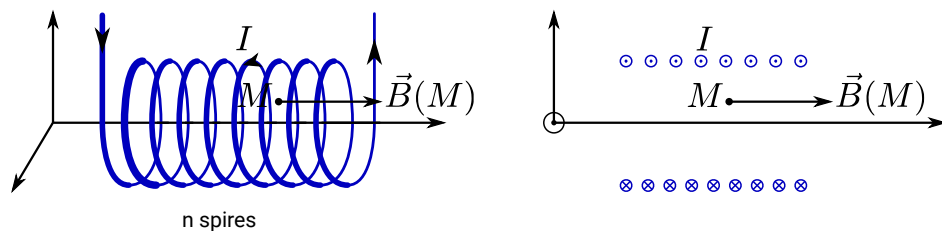


Figure 6: Solénoïde en représentation spatiale à gauche et en représentation en coupe à droite. Le sens du courant, normal au plan de coupe, est indiqué.

Lorsqu'un solénoïde long devant son rayon (  $l \gg R$  ), de  $n$  spires, est parcouru par un courant

$I$  , le champ à l'intérieur s'établit de façon quasi-uniforme et vaut  $\vec{B} = \frac{\mu_0 n}{l} I \vec{u}_z$  (figure 6). Si un anneau de ferrite (de section constante) canalise le champ magnétique (figure 7), celui-ci sera beaucoup plus intense dans l'anneau et vaudra  $\vec{B} = \frac{\mu n}{l} I \vec{u}_z$  où  $l$  traduit la longueur de l'anneau de ferrite. Cette remarque sera utile car le champ dans un moteur électrique est toujours canalisé par les armatures. Nous verrons plus loin comment l'entrefer entre le rotor et le stator intervient. Par ailleurs, lorsque le champ est canalisé par un anneau, il n'est plus nécessaire pour le solénoïde d'être long : même pour une bobine plate, le champ suivra de toute façon l'armature comme un fluide suivrait un tuyau quasi-étanche. Dans l'expression  $\vec{B} = \frac{\mu n}{l} I \vec{u}_z$  ,  $\mu$  et  $l$  relèvent des caractéristiques du circuit magnétique (longueur et perméabilité magnétique du

matériau) tandis que  $n$  et  $I$  relèvent de la bobine à l'origine du champ magnétique. La quantité  $\varepsilon = nI$  est appelée la force magnétomotrice et agit pour le circuit magnétique comme une source de type *potentiel*.

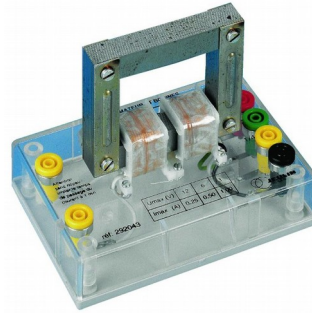
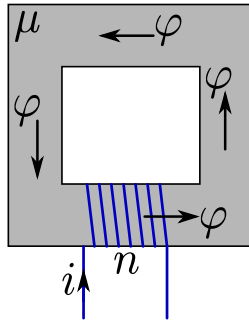


Figure 7: Solénoïde muni d'un anneau de ferrite canalisant le champ magnétique.

Dans cette analogie avec un fluide, le champ  $\vec{B}$  est représentatif de la vitesse du fluide. Une grandeur particulièrement intéressante pour la suite est le débit circulant dans la canalisation équivalente que constitue l'anneau de ferrite. Cette grandeur s'appelle le *flux magnétique*  $\phi$ .

Le flux magnétique sur une section est la somme du champ  $\vec{B}$  sur la surface  $S$  de la section :

$$\phi = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

Dans un solénoïde où  $\vec{B}$  est constant et normal à la section, le calcul est simple :

$$\phi = B \cdot S = B \pi R^2 = \mu_0 \frac{n}{l} I S$$

De même lorsqu'une bobine entoure un anneau de ferrite, le flux s'exprime de la même façon avec la perméabilité du milieu  $\mu$ , la longueur  $l$  de l'anneau et la section  $S$  de l'anneau (la somme de  $B$  sur la surface hors de l'anneau de ferrite étant négligeable car  $\mu_0 \ll \mu$ ). L'anneau de ferrite forme un tube de champ (en supposant qu'il canalise toutes les lignes de champ).

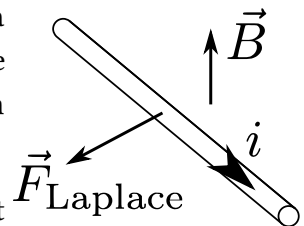
La notion de flux magnétique est très importante pour la suite car la force contre-électromotrice dans un moteur est directement issue de la variation du flux au cours du temps (loi de Lenz-Faraday).

Une autre grandeur physique caractérisant le champ magnétique est l'excitation magnétique

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M} \quad \text{où } \vec{M} \text{ est la magnétisation du milieu. Dans l'air, } \vec{M} \text{ est nul et } \vec{B} \text{ et } \vec{H}$$

ne diffèrent que d'une constante multiplicative. Dans un matériau ferromagnétique, un champ extérieur  $B$  aura pour effet de magnétiser le milieu ce qui va démultiplier son intensité. La grandeur  $H$  traduit la part provenant de l'excitation extérieure et qui va magnétiser le milieu, d'où le nom d'excitation magnétique.

La grandeur  $H$  ne sera pas utilisée par la suite. Elle est principalement



utile lorsqu'il faut tenir compte des saturations magnétiques dans le milieu.

Une dernière notion importante est l'action d'un champ magnétique sur le mouvement d'une charge, et dans le cas qui nous intéresse, sur le conducteur électrique dans lequel circule un courant : une force mécanique résulte de l'interaction, appelée force de Laplace. Pour un petit élément de longueur  $\delta l$  de conducteur placé dans un champ extérieur  $B$  :

$$\delta \vec{F} = I \delta l \wedge \vec{B}$$

Cette action sera à l'origine du couple magnétique dans un moteur.

## 2.2 Aimants et bobines

Un aimant est caractérisé par son *moment magnétique*  $\vec{m}$ , orienté du pôle sud de l'aimant vers le pôle nord. Il s'agit d'un dipôle magnétique.

Une bobine peut aussi être considérée comme un dipôle magnétique. Son moment magnétique s'écrit alors  $\vec{m} = n I \vec{S}$  où  $n$  est le nombre de spires,  $I$  l'intensité et  $\vec{S}$  la surface, orientée positivement par le sens de rotation de  $I$ . Nous étudierons par la suite les moteurs brushless à aimants permanents mais certaines machines synchrones ont un rotor bobiné agissant comme un électro-aimant.

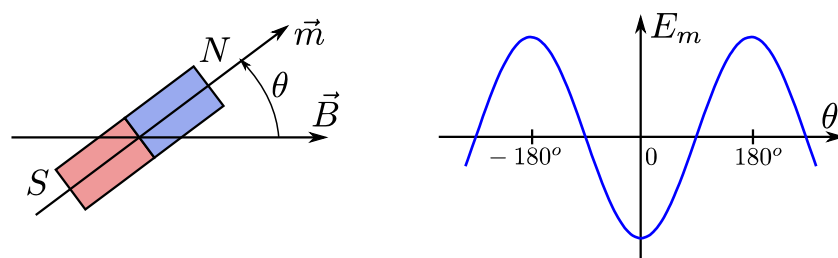


Figure 8: Dipôle magnétique et évolution de l'énergie potentielle magnétique en fonction de l'angle.

Un aimant plongé dans un champ magnétique extérieur (figure 8) tend à s'orienter dans le même sens que le champ magnétique, comme dans le cas d'une boussole. Le couple de rappel dépend de l'angle et s'écrit de façon assez intuitive :  $\vec{C} = \vec{m} \wedge \vec{B}$ . La norme du couple vaut donc

$C = mB \sin \theta$  : il est nul pour un angle nul, il est maximum pour un angle de  $90^\circ$ . Il redevient nul pour  $180^\circ$  mais cette position est instable car un petit écart angulaire va créer un couple qui l'éloigne de la position  $180^\circ$ .

En considérant le travail élémentaire du couple  $C$  dans une rotation  $d\theta$ , on retrouve facilement qu'il dérive d'une énergie potentielle magnétique :  $dE_m = C d\theta = mB \sin \theta d\theta$ , d'où

$E_m = -mB \cos \theta$ . La figure 8 montre l'évolution de l'énergie mécanique en fonction de l'angle et permet de visualiser le puits d'énergie, le phénomène cherchant toujours à converger vers la situation de minimum d'énergie, comme une bille descend au fond du trou.

Un aimant tend à imposer le flux magnétique dans le circuit magnétique et agit dans un circuit magnétique comme une source magnétique de type *flux* (une bobine agissant comme une source magnétique de type *potentiel*).

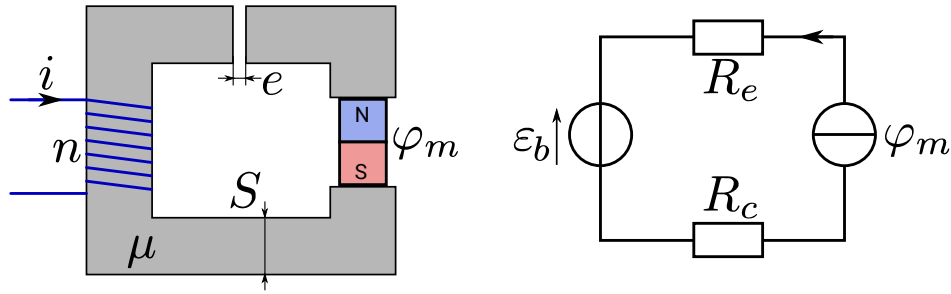


Figure 9: Circuit magnétique et son analogie électrique

Pour bien comprendre les interactions entre circuit magnétique, bobine, aimant et entrefer, il est avantageux de tisser des analogies entre différents domaines. Le tableau ci-dessous donne les analogies entre les grandeurs magnétiques, électriques et de mécanique des fluides :

Magnétique	Électrique	Mécanique des fluides	Remarque
Flux magnétique $\phi$	Intensité $i$	Débit $q$	Grandeur flux
Force magnéto-motrice $\varepsilon$ (ou $f$ )	Force électro-motrice (tension) $e$ ou $u$	Pression $p$	Grandeur potentiel ou effort
Perméabilité magnétique $\mu$	Conductivité électrique $\sigma$	Rapport perméabilité (d'un matériau poreux)/viscosité (du fluide)	(Dans un milieu 3D)
Réductance $R$	Résistance $R$	Coefficient de perte de charge $L$	
Loi d'Hopkinson $\varepsilon = R \phi$	Loi d'Ohm $u = R i$	Perte de charge en régime laminaire $\Delta p = L q$	
Bobine, générateur de force magnétomotrice $\varepsilon$	Générateur de tension $U_g$	Pompe centrifuge $\Delta p_p$	Source potentiel ou effort
Aimant, générateur de flux $\phi_M$	Générateur de courant $I_g$	Pompe volumétrique $Q_p$	Source flux

Remarque : l'analogie utilisée conduit à un produit  $\varepsilon \cdot \phi$  homogène à un travail. Par ailleurs, la réductance est un stockage d'énergie et non une dissipation. Pour pousser l'analogie au sens des modélisations de type modélica ou bond

graph, il faut utiliser  $\dot{\phi} = \frac{d\phi}{dt}$  comme variable flux et la réductance devient l'analogue d'un condensateur.

Un anneau de ferrite fait office de conduit magnétique et permet d'adopter un raisonnement

unidimensionnel comme pour les circuits électriques ou hydrauliques. Un circuit comportant une bobine, un aimant et un entrefer (figure 9) peut être modélisé comme un circuit électrique. La perméabilité imparfaite du noyau de ferrite peut être modélisée par une réluctance  $R_c$  (faible, voire négligeable en première approximation), la perméabilité très faible dans l'entrefer est aussi modélisée par une réluctance  $R_e$  (importante), la bobine agit comme une source de force électromagnétique et l'aimant comme une source de flux magnétique (éventuellement imparfaite, c'est-à-dire avec une résistance interne en parallèle).

Le flux magnétique  $\phi$  traversant les composants est identique tandis que la loi des mailles s'écrit :

$$ni + (R_e + R_c)\phi + \varepsilon_b = 0$$

L'expression des réluctances magnétiques est intéressante, en particulier pour caractériser l'entrefer. Pour un simple circuit magnétique excité par une bobine, on a vu que le flux s'écrit simplement

$$\phi = BS = \frac{\mu S}{l} ni = \varepsilon / R \text{ où la force magnétomotrice vaut } \varepsilon = ni \text{ et}$$

donc la réluctance  $R$  vaut  $R = \frac{l}{\mu S}$ . La dépendance à la longueur du circuit, sa section et sa perméabilité sont tout à fait intuitives.

Lorsqu'il y a présence d'un entrefer de faible épaisseur devant la section (figure 10), le champ  $B$  reste canalisé, si bien que le flux reste localisé dans l'entrefer et le raisonnement 1D reste valable. Le circuit magnétique est donc constitué de deux matériaux : le matériau ferromagnétique sur l'essentiel de la longueur  $l$  et l'air dans l'entrefer, sur une longueur (disons une épaisseur)  $e \ll l$ .

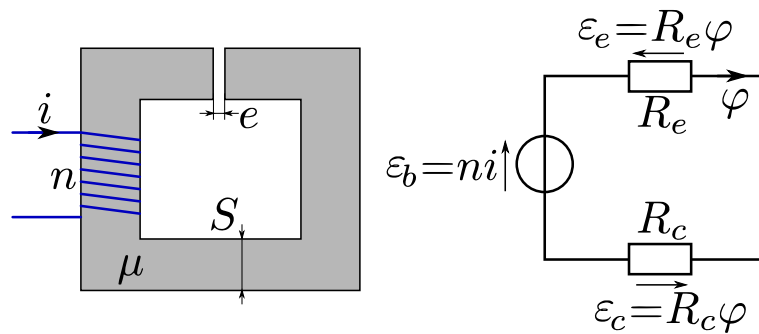


Figure 10: circuit magnétique avec bobine et entrefer et sa modélisation magnétique.

Il est donc possible d'exprimer deux réluctances, pour les deux portions de circuit. Dans l'entrefer,

$$R_e = \frac{e}{\mu_0 S} \text{ et dans le reste du circuit } R_c = \frac{l}{\mu S}. \text{ En évaluant quelques ordres de grandeurs}$$

(pour un moteur de la taille de la main, l'entrefer vaut au moins 0.1mm, la longueur du circuit magnétique au maximum 10cm), on trouve que le rapport  $\frac{R_e}{R_c} = \frac{e \mu_r}{l}$  est supérieur à 10 :

l'entrefer, malgré sa faible épaisseur, absorbe l'essentiel de la force magnéto-motrice.

Il agit comme le ferait une paroi poreuse d'épaisseur constante (si l'entrefer est d'épaisseur constante) placée en travers d'un tuyau. On comprend assez facilement que la pression localement serait homogène de part et d'autre de la paroi poreuse et que la densité de flux (le champ B en magnétisme) sera homogène dans toute la paroi poreuse. C'est exactement ce qui est observé localement dans l'entrefer : un champ B uniforme et orthogonal aux surfaces.

## 2.3 L'induction magnétique

Il y a induction magnétique lorsqu'une variation de champ magnétique autour d'un circuit électrique crée une force électromotrice dans ce circuit. L'induction est décrite par la loi de Lenz-Faraday : la force électromotrice est la dérivée du flux.

$$e(t) = -\frac{d\phi}{dt}(t)$$

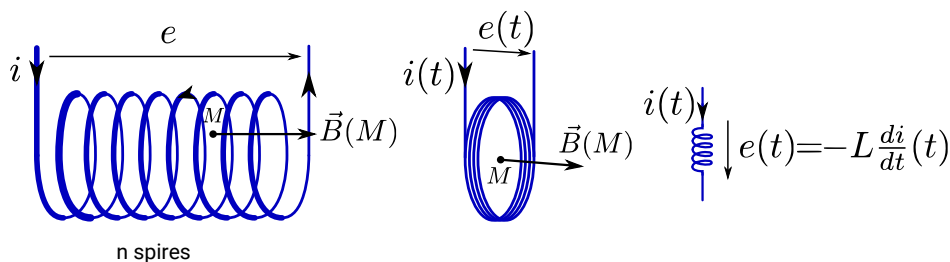
où  $e(t)$  est la *force électromotrice*<sup>1</sup> créée et  $\phi(t)$  le flux total du champ magnétique à travers la surface du circuit.

On remarque qu'un champ magnétique constant dans le temps, sans mouvement du circuit, ne crée pas de force électromotrice.

Si on considère une bobine de  $n$  spires et un champ  $B(t)$  uniforme la traversant, le flux  $\phi$  vu par le circuit électrique est multiplié par le nombre de spires car il y a autant de surface exposées que de spires :  $\phi = BnS$ .

### 2.3.1 L'auto-induction d'une seule bobine

Une bobine, même seule, est soumise à l'induction par son propre champ magnétique, qui la traverse, d'où le nom d'auto-induction.



Pour un solénoïde relativement long par rapport à son diamètre,  $\vec{B} = \frac{\mu_0 n}{l} i \vec{u}_z$  et le flux de B à

travers une section vaut  $\phi = BS = \frac{\mu_0 n S}{l} i$ .

Sachant qu'il y a  $n$  spires, le flux total vu par la bobine vaut  $\phi_t = n\phi$ . La force électromotrice

<sup>1</sup> Nous aurons l'occasion d'utiliser par la suite la *force contre-électromotrice*, qui est l'opposé de la force électromotrice.

s'écrit donc comme la dérivée du flux :  $e(t) = \frac{-d\phi_t}{dt}(t) = \frac{-\mu_0 n^2 S}{l} \frac{di}{dt}(t) = -L \frac{di}{dt}(t)$  .

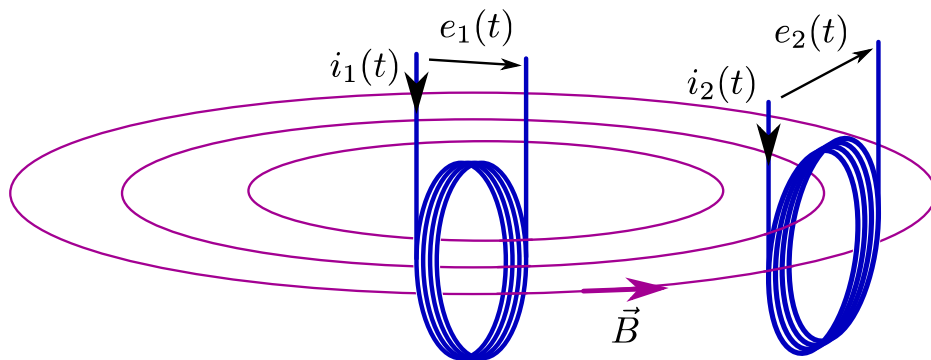
On voit donc apparaître une constante  $L$  , qui ne dépend que des caractéristiques des circuits électriques et magnétiques.  $L$  est l'inductance propre de la bobine. Si un anneau de ferrite guide le champ magnétique dans la bobine, il faut substituer  $\mu_0$  par  $\mu$  et la surface  $S$  de la bobine par la section de l'anneau de ferrite. L'inductance  $L$  s'en trouve largement augmentée.

La convention de signe dans cette expression est de mesurer  $e(t)$  dans le sens du courant  $i(t)$  . Ainsi si le courant augmente, la bobine se charge d'énergie magnétique et  $e(t)$  est négatif par rapport à  $i(t)$  ; la bobine consomme de l'énergie du circuit extérieur. Si le courant diminue,  $e(t)$  devient positif (dans le même sens que  $i(t)$  ) et la bobine devient générateur : elle apporte de l'énergie au circuit extérieur et se décharge de son énergie magnétique.

Les bobines d'un moteur brushless sont évidemment soumises à une auto-induction.

### 2.3.2 Mutuelle induction entre deux bobines

Lorsque deux bobines sont à proximité l'une de l'autre, le champ magnétique de l'une crée un flux à travers l'autre bobine. Prenons le cas simple où une bobine 1, fixe, est parcourue par un courant  $i_1$  et l'autre bobine, fixe, est en circuit ouvert (  $i_2 = \text{nul}$  ).



Le champ créé par la bobine 1 passe partiellement dans la bobine 2, si bien que la somme sur la surface de la bobine 2 crée un flux  $\phi_{12}$  , ne dépendant que de  $i_1$  et de constantes géométriques

et matériaux. Il existe donc une constante  $M_{12}$  telle que la tension induite  $e_2(t) = M_{12} \frac{di_1}{dt}(t)$  .

Dans le cas général où les bobines sont toutes les deux parcourues par des courants, et en tenant compte de l'effet Joule dans les conducteurs, les expressions des deux tensions se traduisent par les schémas électriques figure 11 et s'expriment :

$$e_1(t) = -R_1 i_1(t) - L_1 \frac{di_1}{dt}(t) - M_{21} \frac{di_2}{dt}(t)$$

$$e_2(t) = -R_2 i_2(t) - L_2 \frac{di_2}{dt}(t) - M_{12} \frac{di_1}{dt}(t)$$



On peut montrer que  $M_{12}=M_{21}$  .

Un cas intéressant pour les moteurs brushless est le cas où une armature relie les deux bobines et concentre le flux. Dans ce cas, la totalité du flux généré par une bobine induit la seconde. Dans ce cas il est possible de calculer  $L_1$  et  $L_2$  (voir paragraphe précédent), ainsi que  $M_{21}$  et  $M_{12}$  :

$$L_1 = \frac{\mu n_1^2 S}{l} \quad ; \quad L_2 = \frac{\mu n_2^2 S}{l} \quad ; \quad M_{12} = M_{21} = \frac{\mu n_1 n_2 S}{l} = \sqrt{L_1 L_2}$$

Où  $S$  est la section de l'anneau de ferrite et  $l$  sa longueur. Pour les moteurs, les nombres de spires, et donc les inductances des bobines, seront identiques.

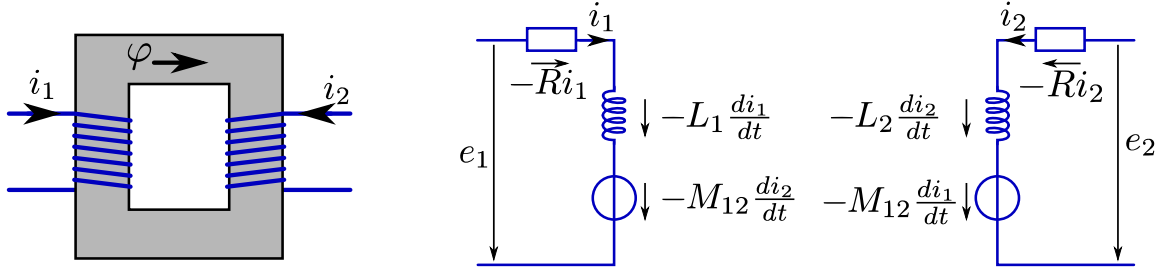


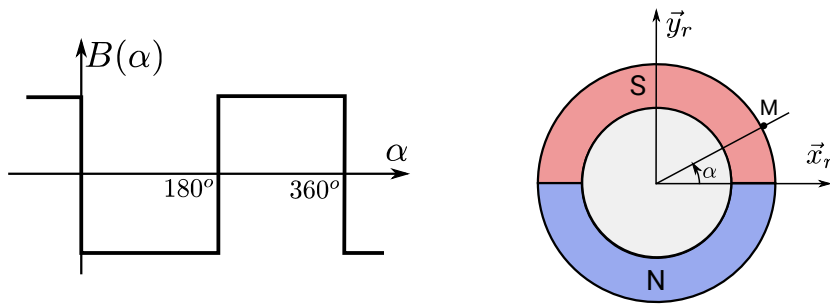
Figure 11: Circuit magnétique couplant 2 bobines et la modélisation électrique du couplage.

Les paragraphes précédents ont permis de faire un grand tour d'horizon des différents phénomènes électro-magnétiques, sur des cas simples et des cas combinés. Nous allons maintenant entrer dans le détail de l'architecture d'un moteur brushless pour modéliser les phénomènes magnétiques et en déduire les expressions des couplages magnétiques entre grandeurs électriques et mécaniques, c'est-à-dire l'équivalent des constantes de vitesse  $K_e$  et de couple  $K_t$  pour un moteur à courant continu.

## 2.4 Les constantes de vitesse et de couple dans un BLDC

Un moteur brushless de type BLDC est un moteur conçu pour être commandé à l'image d'un moteur à courant continu, en assurant la commutation électroniquement plutôt que par un collecteur. Pour une raison de régularité du couple que nous allons voir par la suite, le rotor est équipé d'un ou deux aimants disposés de telle façon qu'il impose un flux magnétique uniforme

$B_0$  dans l'entrefer, au signe près (positif du côté nord et négatif du côté sud). L'expression mathématique du champ dans l'entrefer peut s'écrire sous la forme  $B(\alpha) = \delta_B(\alpha) B_0$  , avec  $\delta_B(\alpha)$  représentant le signe :  $\delta_B(\alpha) = -1 \forall \alpha \in [0, \pi]$  et  $\delta_B(\alpha) = 1 \forall \alpha \in [\pi, 2\pi]$



La convention de signe choisie ici conduit à un champ négatif (pôle sud) sur le haut et positif (pôle nord) sur le bas du rotor. Le dipôle magnétique  $\vec{m} = -m \vec{y}_r$  est orienté vers le bas.

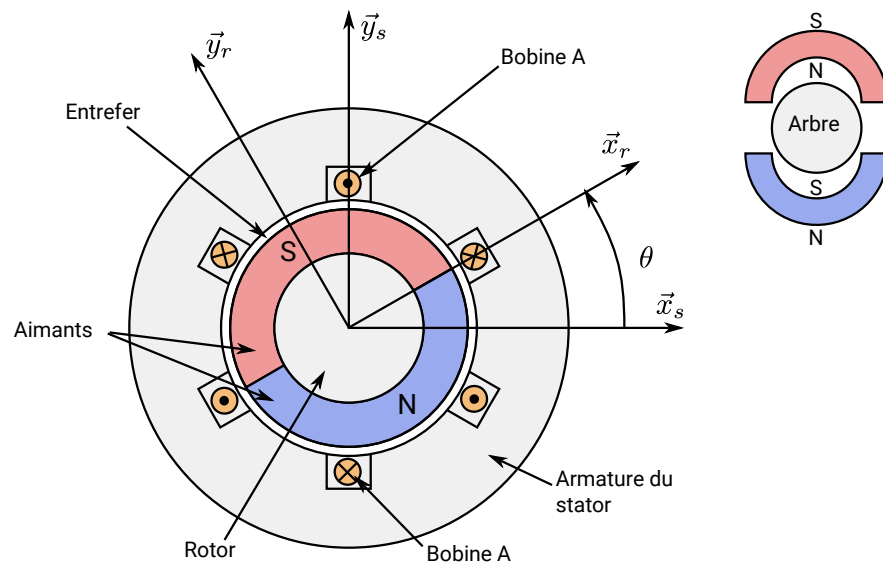


Figure 12: Architecture d'un moteur BLDC

Les armatures du stator ainsi que l'acier du rotor canalisent le champ magnétique imposé par l'aimant, qui s'oriente positivement en allant des faces nord des aimants vers les faces sud (sauf à l'intérieur des aimants). Il faut noter que l'aimant indiqué « nord » a en réalité 2 pôles nord et sud, le pôle nord étant coté entrefer et imposant ainsi l'orientation du champ magnétique dans l'entrefer. Le pôle sud de cet aimant est coté rotor. C'est bien entendu l'inverse pour l'aimant noté « sud ». Lorsque le rotor tourne, les lignes de champs restent identiques dans un repère accroché au rotor (la géométrie du stator restant invariante par rotation. On suppose dans un premier temps que la bobine n'est pas alimentée (donc aucun champ magnétique n'est généré par la bobine).

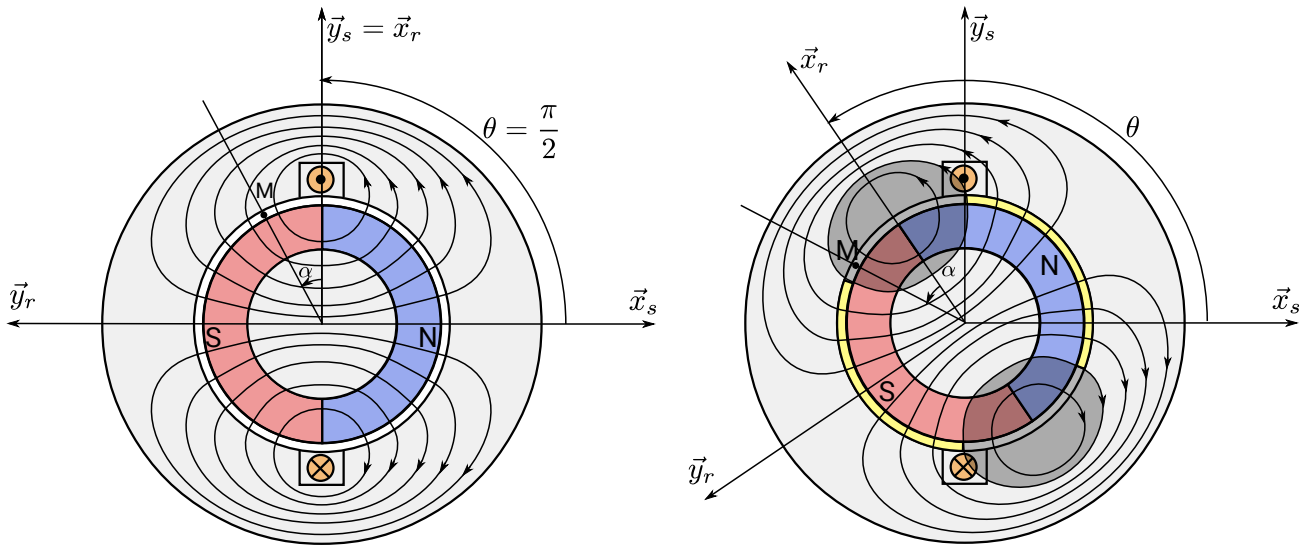


Figure 13: Champ magnétique dans un moteur BLDC.

Les bobinages sont disposés sur le stator, à proximité de l'entrefer. Il y a trois bobines dans un BLDC (figure 12) mais une seule a été représentée figure 13 car les calculs que nous allons réaliser sont identiques pour les trois bobines, à un décalage angulaire de  $120^\circ$  près. La bobine entoure le rotor, et d'après la convention de signe indiquée, le courant circule positivement dans le sens sortant de la feuille en haut et dans le sens rentrant en bas. On suppose que la dimension dans le sens de la profondeur vaut  $l$ , qui s'avère donc être à la fois la largeur de l'entrefer suivant  $\vec{z}$  et la longueur de chaque conducteur. On rappelle que la machine est à pôle lisse et on suppose qu'il n'y a pas de saturation magnétique.

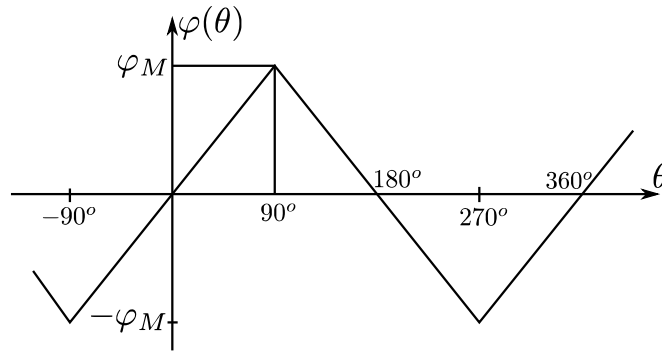
#### 2.4.1 Constante de vitesse

La figure 13 à gauche, tracée dans la situation particulière où  $\theta = 90^\circ$ , montre les lignes de champ qui passent toutes à l'intérieur de la bobine et se referment toutes par l'extérieur de la bobine : le flux généré par l'aimant traverse intégralement la bobine et on retrouve la situation représentée schématiquement sur la figure 9 page 13. Le flux du champ à travers la bobine est donc positif et maximal dans cette position, noté  $\phi_M$ .

L'aimant est magnétisé de façon uniforme, si bien que l'intensité du champ  $B$  dans l'entrefer est constant, au signe près. La courbe suivante représente l'évolution du champ  $B$  en fonction de la position du point  $M$  du rotor, paramétré par l'angle  $\alpha$ . On peut alors en déduire

$$\phi_M = n \int_{\text{demi-entrefer}} \vec{B} d\vec{S} = n \pi R l B_0.$$

Lorsque le rotor tourne d'un angle  $\theta$  quelconque (figure 13 à droite), une partie des lignes de champ n'entourent plus les conducteurs de la bobine. Cette part du flux des aimants n'est pas vu par la bobine. Le champ magnétique étant constant dans l'entrefer, la part vue par la bobine (zone jaune de l'entrefer) est directement proportionnelle à l'angle et devient nulle pour un angle de  $\theta = 180^\circ$  où aucune ligne de champ n'entoure les bobines. En poursuivant la rotation au-delà de  $180^\circ$ , le flux devient négatif et atteindra la valeur minimale de  $-\phi_M$  pour l'angle de  $270^\circ$ .



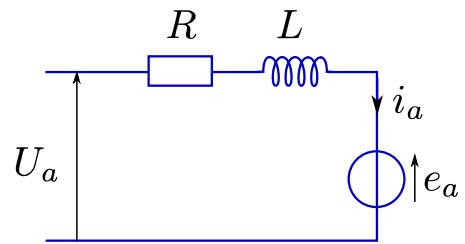
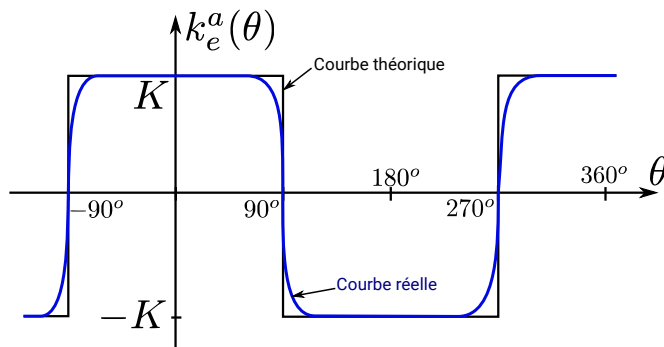
La courbe d'évolution du flux de l'aimant à travers la bobine est décrite ci-dessus. L'expression mathématique se résume à une loi affine où la pente change de signe en fonction de l'angle :

$$\phi(\theta) = \delta(\theta) \frac{2\phi_M}{\pi} \theta + cste, \text{ avec } \delta(\theta) = 1 \forall \theta \in [-\pi/2, \pi/2] \text{ et } \delta(\theta) = -1 \forall \theta \in [\pi/2, 3\pi/2]$$

L'essentiel du travail est fait : la force électromotrice est égale à la dérivé du flux, ce qui permet d'identifier une fonction  $k_e^a(\theta)$  liant la force électromotrice dans la bobine (a) et la vitesse de rotation du moteur :

$$e(t) = \frac{d\phi}{dt} = \frac{d\phi}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = -\delta(\theta) \frac{2\phi_M}{\pi} \omega = -k_e^a(\theta) \omega$$

où  $k_e^a(\theta) = \delta(\theta) \frac{2\phi_M}{\pi} = \delta(\theta) K$  est une fonction constante par morceaux, représentée sur la figure suivante. Cette loi est idéale et la forme réelle de la courbe présentera des transitoires adoucis.



Pour terminer, il faut noter que la loi de Faraday oriente le champ électromoteur dans le même sens que le courant, ce qui n'est pas le sens conventionnel lorsqu'on étudie les phases des moteurs synchrone, où on préfère parler de force contre-électromotrice  $e_a(t) = -e(t)$ . En adoptant cette notation, on retrouve le signe classique :  $e_a(t) = k_e^a(\theta) \omega$ .

## 2.4.2 Constante de couple

Le couple est créé par la force de Laplace qui s'applique orthoradialement sur chaque conducteur :

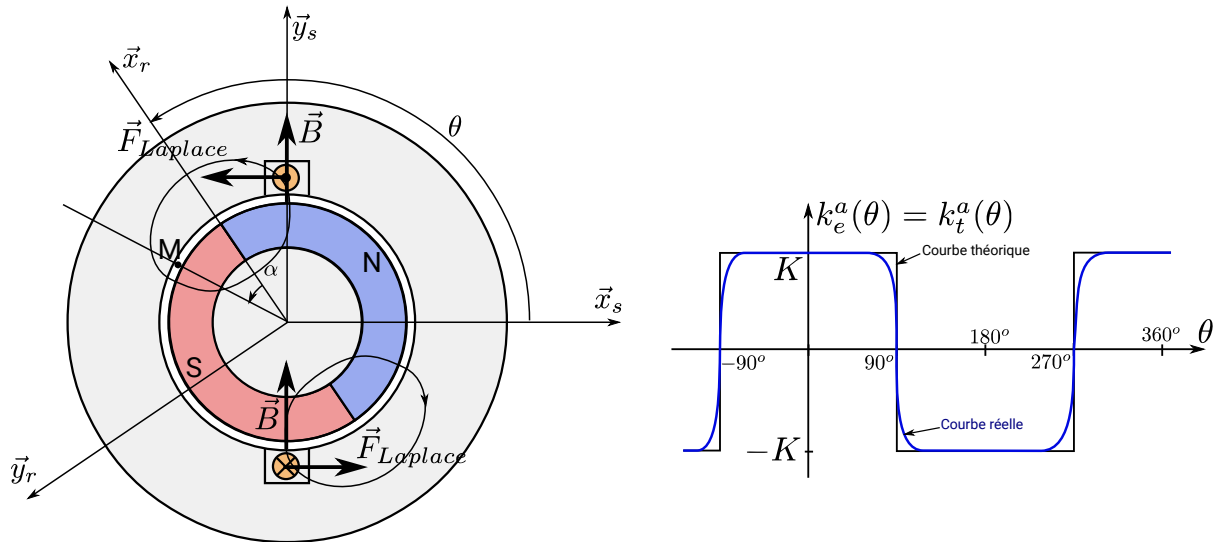
$\vec{F}_{Laplace} = ni \vec{l} \wedge \vec{B}$ . Si l'intensité est constante, cette force est constante (au signe près). À noter qu'il s'agit d'une force du champ magnétique du rotor sur le conducteur lié au stator, donc une action du rotor sur le stator.

Le couple magnétique de la bobine (a) du stator sur le rotor s'exprime donc (pour les deux conducteurs, et sachant que dans le référentiel du rotor, le conducteur supérieur sera en  $\alpha = \pi/2 - \theta$ ) :

$$C_{s/r} = -C_{r/s} = -2 R F_{laplace} = -2 n i l R B (\pi/2 - \theta) = -2 n i l R B_0 \delta_B (\pi/2 - \theta) = 2 n i l R B_0 \delta (\theta)$$

En remplaçant  $B_0$  par le flux  $\phi_M$ , on retrouve la constante K :

$$C_{s/r} = 2 n i l R B_0 \delta (\theta) = \delta (\theta) \frac{2 \phi_M}{\pi} i = \delta (\theta) K i = k_t (\theta) i \quad \text{avec} \quad k_t^a (\theta) = \delta (\theta) K = k_e^a (\theta)$$



La loi liant le couple à l'intensité dans la bobine (a) est donc la même fonction constante par morceaux que la loi liant la vitesse à la force contre-électromotrice dans la bobine (a). Ce résultat est bien connu pour les moteurs CC et se justifie simplement par conservation de l'énergie (en négligeant les pertes magnétiques) :

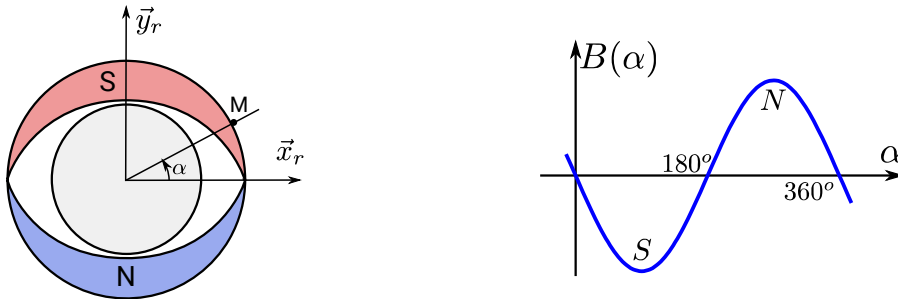
$$C_a \omega = e_a i \quad \text{donc} \quad k_t^a (\theta) = \frac{C_a}{i} = \frac{e_a}{\omega} = k_e^a (\theta)$$

L'approche par la force de Laplace, bien qu'aboutissant aux bonnes relations, est une interprétation simplifiée des phénomènes réels. En effet, l'action mécanique ne s'exerce pas réellement sur les conducteurs mais sur les armatures. Le champ magnétique dans l'encoche du conducteur est beaucoup plus faible que dans l'entrefer... En réalité, il faut raisonner sur l'énergie magnétique emmagasinée et la tendance naturelle du système à minimiser l'énergie.

## 2.5 Les constantes de vitesse et de couple dans une machine synchrone sinusoïdale

Un moteur brushless de type machine synchrone sinusoïdale est un moteur conçu pour être commandé par un courant triphasé, généralement à fréquence variable, fourni par un onduleur. Pour une raison de régularité du couple que nous allons voir par la suite, le rotor est équipé d'un

ou deux aimants disposés de telle façon qu'il impose un flux magnétique sinusoïdale dans l'entrefer. La convention de signe choisie ici conduit à un champ négatif (pôle sud) sur le haut et positif (pôle nord) sur le bas du rotor. Le dipôle magnétique  $\vec{m} = -m \vec{y}_r$  est orienté vers le bas comme dans le chapitre précédent ; cette convention sera cohérente avec les diagrammes de Fresnel dans la partie suivante. On rappelle que la machine est à pôle lisse et on suppose qu'il n'y a pas de saturation magnétique.



### 2.5.1 Constante de vitesse

La figure de gauche, tracée dans la situation particulière où  $\theta = 90^\circ$ , montre les lignes de champ qui passent toutes à l'intérieur de la bobine et rebouclent toutes par l'extérieur de la bobine : le flux généré par l'aimant traverse intégralement la bobine. Le flux du champ à travers la bobine est donc positif et maximal dans cette position, noté  $\phi_M$ .

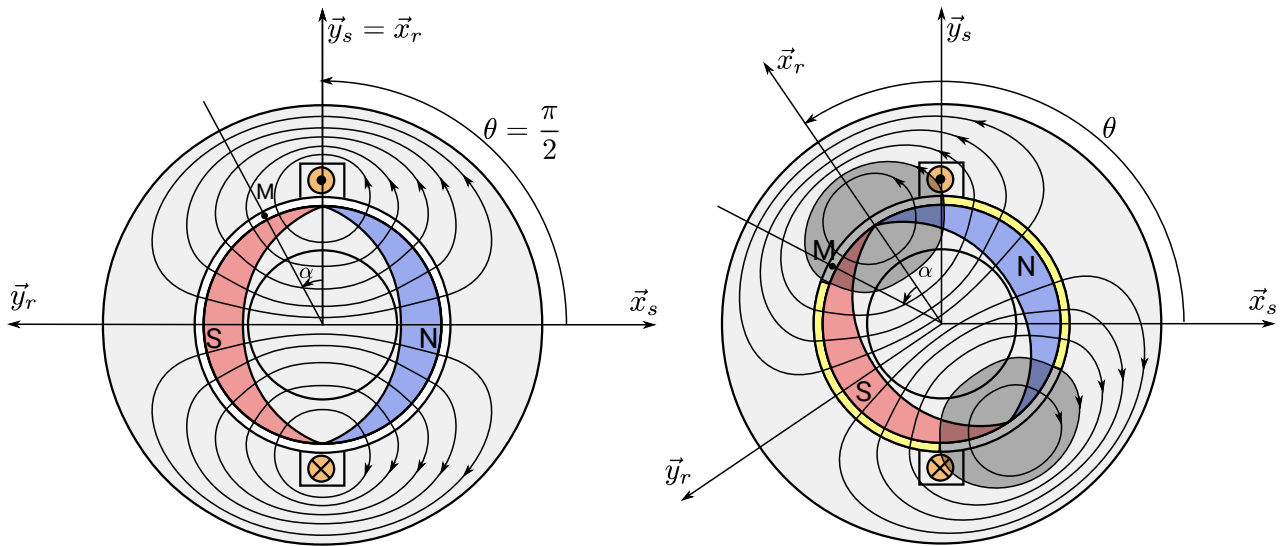


Figure 14: Champ magnétique dans un moteur sinusoïdal.

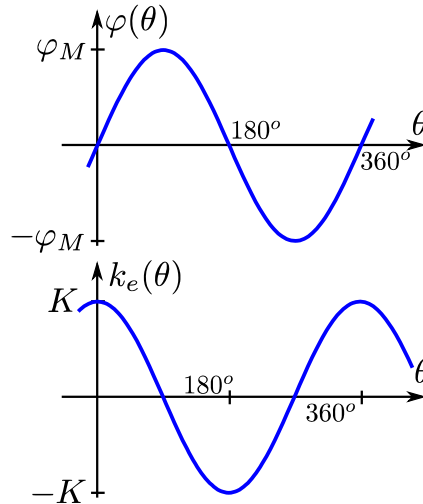
L'aimant est magnétisé de façon sinusoïdale, si bien que le calcul du flux maximal se fait en intégrant le champ sur la moitié de la surface de l'entrefer. Cette intégrale contenant un sinus est similaire au calcul bien connu en statique des fluides, d'une pression constante sur un demi-cylindre, aboutissant à la pression multiplié par la surface diamétrale :

$$\phi_M = n \int_{\text{entrefer}} \vec{B} d\vec{S} = n l \int_{\pi}^{2\pi} B_0(\alpha) R d\alpha = n l \int_{\pi}^{2\pi} -B_0 \sin(\alpha) R d\alpha = 2 l R B_0 \quad .$$

Lorsque le rotor tourne d'un angle  $\theta$  quelconque (figure de droite), une partie des lignes de champ n'entourent plus les conducteurs de la bobine. Cette part du flux des aimants n'est pas vu par la bobine. On montre alors que le calcul du flux aboutit à une expression sinusoïdale :

$$\phi(\theta) = n \int_{\text{zone grisée}} \vec{B} d\vec{S} = 2nl \int_{-\pi/2}^{\theta-\pi/2} B_0(\alpha) R d\alpha = nlR \int_{-\pi/2}^{\theta-\pi/2} -B_0 \sin \alpha d\alpha = nlRB_0 [\cos \alpha]_{-\pi/2}^{\theta-\pi/2}$$

Soit :  $\phi(\theta) = nlRB_0 \sin \theta$  La courbe est donnée ci-dessous et atteint un minimum à  $-\phi_M$  en  $-270^\circ$  de façon logique.



La force contre-électromotrice  $e_a(t) = -e(t)$  est égale à la dérivé du flux, ce qui permet d'identifier une fonction  $k_e^a(\theta)$  liant la force contre-électromotrice dans la bobine (a) et la vitesse de rotation du moteur :

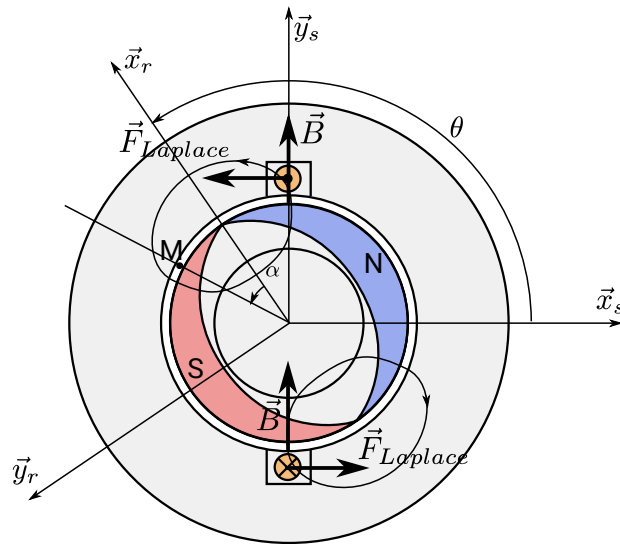
$$e_a(t) = \frac{d\phi}{dt} = \frac{d\phi}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = \delta(\theta) \frac{2\phi_M}{\pi} \omega = k_e^a(\theta) \omega \quad \text{où} \quad k_e^a(\theta) = \phi_M \cos \theta = K \cos \theta$$
 est une fonction sinusoïdale.

## 2.5.2 Constante de couple

Le couple est créé par la force de Laplace qui s'applique orthoradialement sur chaque conducteur :

$\vec{F}_{Laplace} = ni \vec{l} \wedge \vec{B}$  . Le calcul est rigoureusement identique à celui réalisé pour le moteur BLDC, en remplaçant l'expression de  $B(\theta)$  par sa nouvelle expression sinusoïdale :

$$C_{s/r} = -C_{r/s} = -2RF_{laplace} = -2nilRB(\pi/2 - \theta) = 2nilRB_0 \sin(\pi/2 - \theta) = 2nilRB_0 \cos(\theta)$$



En remplaçant  $B_0$  par le flux  $\phi_M$ , on retrouve la constante K :

$$C_{s/r} = 2nilRB_0 \cos(\theta) = \phi_M i \cos(\theta) = Ki \cos(\theta) = k_t(\theta) i \quad \text{avec} \quad k_t^a(\theta) = K \cos(\theta) = k_e^a(\theta)$$

La loi liant le couple à l'intensité dans la bobine (a) est donc à nouveau la même fonction constante par morceaux que la loi liant la vitesse à la force contre-électromotrice dans la bobine (a).

Il serait possible de retrouver cette même expression par une formulation énergétique.



## 3 Modélisation d'un moteur BLDC

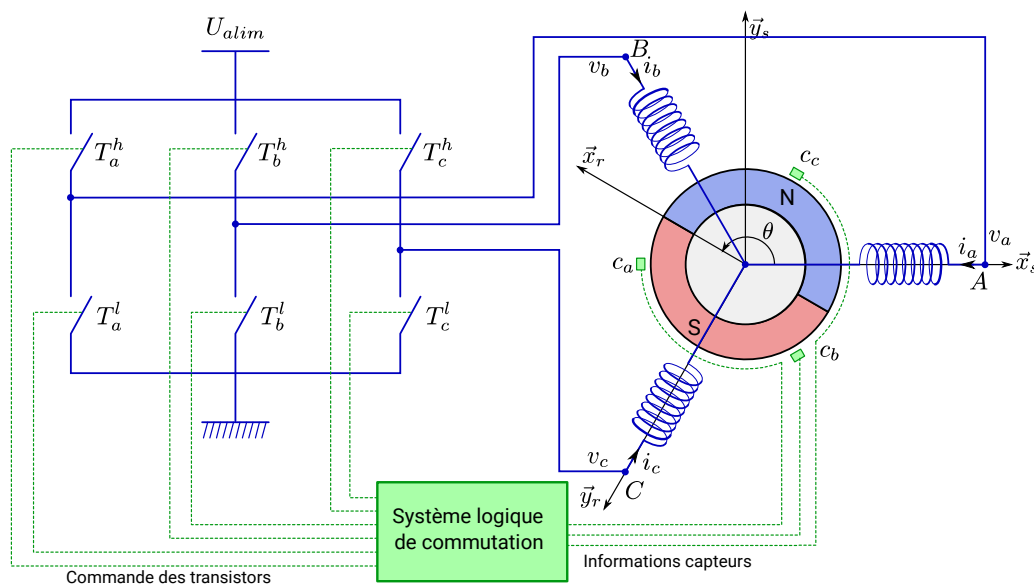
### 3.1 La commutation

#### 3.1.1 La commande logique

Un moteur Brushless de type BLDC est une machine synchrone dont le comportement reproduit celui d'une machine à courant continu, où la commutation est réalisée électroniquement plutôt que par un collecteur.

La commutation permet de maintenir l'axe magnétique du champ généré par les bobines du stator environ perpendiculaire à l'axe magnétique du rotor, par pas de  $60^\circ$ , de façon à générer un couple magnétique sur le rotor. Lorsque le rotor se déplace vers le champ magnétique, la commutation va automatiquement basculer le champ de  $60^\circ$  supplémentaires.

Le dispositif de commutation a besoin de l'information de position du rotor, classiquement mesurée par 3 capteurs à effet Hall (sensibles au champ magnétique du rotor). Il doit par ailleurs alimenter les trois phases du moteur, par 3 demi-ponts permettant de relier chaque phase soit à la tension d'alimentation continue, soit à la masse.



La figure ci-dessus décrit l'architecture électrique. Le sens des enroulements est tels que si l'intensité  $i$  dans une bobine est positive, elle va tendre à attirer le pôle nord du rotor, et repousser le pôle sud. La situation s'inverse lorsque le courant change de signe.

La commande classique consiste à n'alimenter que 2 bobines à la fois. Lorsque le rotor est dans la position décrite sur la figure par exemple, pour faire tourner le rotor dans le sens positif trigonométrique, il faut que la bobine B attire le pôle nord ( $i_b > 0$ ) et la bobine A le repousse ( $i_a < 0$ ). La bobine C par contre est dans l'axe de l'aimant et ne peut entraîner le rotor ; il ne faut pas l'alimenter. Il convient donc de relier la bobine B à la tension d'alimentation et la bobine A à la

masse. Les trois bobines étant reliées en étoile au niveau du neutre, le courant circulera de B vers A. Le système de commutation doit donc fermer les interrupteurs  $T_b^h$  et  $T_a^l$ , et laisser les autres interrupteurs ouverts.

En convenant qu'un capteur à effet Hall renvoie un 1 logique en face d'un pôle nord et un 0 logique en face d'un pôle sud, la commande précédente doit systématiquement être appliquée aux transistors dès lors que les capteurs  $(c_a, c_b, c_c)$  sont dans l'état 001.

La figure ci-dessous montre l'état des capteurs en fonction de l'angle  $\theta$  du rotor et la commutation des tensions à réaliser pour tourner dans le sens positif (il suffit d'inverser les tensions pour tourner dans le sens négatif).

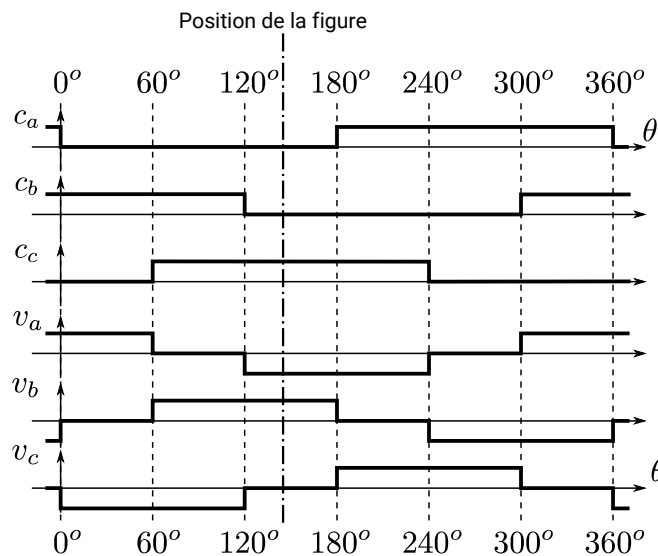


Figure 15: Table de commutation des tensions en fonction des signaux capteurs

La commutation assure donc toujours un angle du champ magnétique du stator en avance de  $60^\circ$  à  $120^\circ$  sur le rotor.

### 3.1.2 Contrôler le niveau de tension appliqué au moteur

La commutation telle qu'elle a été décrite précédemment conduit à alimenter le moteur au maximum de la tension permise par l'alimentation, de façon similaire à un moteur CC qui serait branché directement sur l'alimentation. Pour commander le moteur de façon plus progressive, par exemple pour réaliser un asservissement, il faut pouvoir régler le niveau de tension. Cette opération est classiquement réalisée par un hacheur commandé par une modulation à largeur d'impulsion (MLI ou PWM). La commutation utilisant déjà trois demi-ponts, il est assez naturel d'associer une MLI à la commutation, par exemple sur les transistors hauts. Les courbes ci-dessous décrivent la commande du moteur avec MLI. Souvent la fréquence du hacheur (de l'ordre de 20 kHz) sera bien supérieure à celle de la commutation. Néanmoins, les moteurs brushless pouvant atteindre des vitesses élevées, de l'ordre de 10 000 tr/min, il est possible que la fréquence de commutation devienne du même ordre de grandeur que celle du hacheur.

### 3.1.3 Mise en œuvre d'une commande de BLDC sur micro-contrôleur

La mise en œuvre d'une commande de BLDC sur micro-contrôleur est abordée en détail dans le document 3. Dans les grandes lignes, elle nécessite de détecter les changements d'états des 3 capteurs à effet Hall, à l'aide d'interruptions, permettant de mesurer les 3 états des capteurs et modifier l'état logique des sorties conformément à une table de commutation décrite par la courbe figure 15.

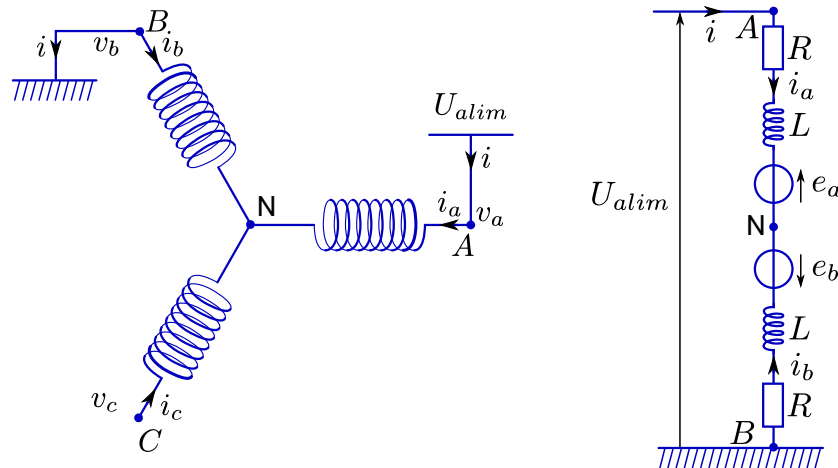
L'application du PWM peut aussi faire l'objet d'un timer qui bascule l'état des transistors hauts entre 0 et l'état figurant dans la table de commutation. Le timer compte à la vitesse d'horloge jusqu'à un maximum définissant la période de la MLI. Une interruption est déclenchée au maximum. Un niveau réglable dans un registre entre 0 et le maximum permet de déclencher lui aussi une interruption, ce qui permet d'ajuster le rapport cyclique.

Il faut noter que les transistors de puissance mettent un temps non nul (de l'ordre de quelques micro-secondes) pour s'ouvrir ou se fermer, si bien qu'il n'est pas possible de commander simultanément le transistor haut et le transistor bas : un temps mort est à prévoir entre l'ouverture du premier et la fermeture du second, qui va limiter la fréquence du PWM.

## 3.2 Mise en équations du modèle

### 3.2.1 Équations électriques

La commande par commutation définie précédemment conduit à n'avoir toujours qu'une seule phase à la tension d'alimentation, une phase reliée à la masse et une phase non reliée (donc d'intensité nulle<sup>2</sup>). Les trois bobines sont reliées au point N appelé neutre, si bien que la somme des courants convergeant vers le neutre est toujours nulle :  $i_a + i_b + i_c = 0$ .



<sup>2</sup> En première approximation car en réalité, les transistors sont en parallèle de diodes de roue libre, qui autorisent le courant à remonter de la masse vers la tension d'alimentation. Dans les phases transitoires de commutation ou lorsque le moteur fonctionne en génératrice, l'énergie contenue dans la bobine ainsi que la FCEM peuvent conduire à un courant transitoire dans la phase dite « non reliée ».

Prenons le cas où la phase A est soumise à la tension d'alimentation  $U_{alim}$ , où la phase B est reliée à la masse, et où la phase C n'est pas reliée (c'est le cas pour un angle  $\theta$  compris entre  $300^\circ$  et  $360^\circ$  d'après la figure 15). Le schéma électrique se réduit à un circuit équivalent où chacune des phases reliées est en série. Pour chaque phase,  $R$  représente la résistance de la bobine,  $L$  l'inductance<sup>3</sup>, et  $e_i$  la force contre-électromotrice générée par le mouvement de l'aimant du rotor.

Conventionnellement, pour chaque phase  $i$ , le courant  $i_i$  est orienté de la phase vers le neutre N et la force contre-électromotrice est orientée dans le sens inverse à  $i_i$ , soit du neutre vers la phase.

Dans la situation de la figure,  $i = i_a = -i_b$  et la loi des mailles s'écrit :

$$U_{alim} = 2Ri + 2L \frac{di}{dt} + e_a - e_b$$

Les forces contre-électromotrices s'expriment à partir des constantes de vitesse de chaque phase, pour la phase correspondante de la commutation. Les courbes figure 16 montrent l'évolution des intensités et de la constante de vitesse. Dans la situation de la figure,  $K^a(\theta) = K$  et  $K^b(\theta) = -K$  si bien que la loi des mailles devient :

$$U_{alim} = 2Ri + 2L \frac{di}{dt} + 2K\omega$$

On retrouve une équation similaire à celle d'un moteur à courant continu où la résistance équivalente correspond au double de la résistance d'une seule phase (c'est à dire la résistance  $2R$  mesurée entre deux phases), de même que pour l'inductance. La constante de vitesse vaut  $2K$  et correspond à nouveau à la valeur mesurée de la FCEM entre deux phases lorsque l'arbre est entraîné.

La commutation va interchanger les phases connectées à  $U_{alim}$ , à la masse ou non connectée, mais dans tous les cas, le schéma électrique restera équivalent et l'équation reste identique au cours du temps.

#### *Remarque sur l'inductance $L$*

L'équation électrique précédente est en réalité simplifiée car les bobines  $a$  et  $b$  sont couplées par une mutuelle inductance  $M_{ab}$ . L'inductance  $L$  prise en compte est en réalité une inductance équivalente prenant en compte l'inductance propre  $L_a = L_b$  des bobines et la mutuelle inductance  $M_{ab}$ . L'équation électrique exacte est la suivante :

$$U_{alim} = \left[ Ri_a + L_a \frac{di_a}{dt} + M_{ab} \frac{di_b}{dt} + K^a(\theta)\omega \right] - \left[ Ri_b + L_b \frac{di_b}{dt} + M_{ab} \frac{di_a}{dt} + K^b(\theta)\omega \right]$$

La mutuelle inductance est liée à l'inductance propre : les bobines ont le même nombre de spires et elles sont inclinées entre elles d'un angle de  $120^\circ$ . La géométrie des armatures

---

<sup>3</sup> Il s'agit en réalité d'une inductance synchrone. Le calcul de cette inductance équivalente est réalisé ci-après.

guidant le champ magnétique influe sur l'expression de la mutuelle inductance mais on peut en première approximation considérer que  $M_{ab}=M_{ba}=L_a \cos 120^\circ = -L_a/2$ .

Sachant que  $i_a = -i_b = i$  et que  $K^a(\theta) = -K^b(\theta) = K$ , l'équation électrique devient :

$$U_{alim} = \left[ Ri + (L_a + L_a/2) \frac{di}{dt} + K \omega \right] - \left[ -Ri + (L_a + L_a/2) \frac{d-i}{dt} - K \omega \right]$$

En posant  $L = 3L_a/2$ , on retrouve l'équation précédente :  $U_{alim} = 2Ri + 2L \frac{di}{dt} + 2K \omega$

#### Remarque sur les limites des hypothèses formulées

Le raisonnement précédent est tout à fait rigoureux si L est supposée nulle. En réalité, les bobines stockent de l'énergie et des transitoires apparaissent à chaque commutation, qu'elle viennent de la rotation du rotor ou de la modulation à largeur d'impulsion. Le courant  $i$  ne s'établit pas instantanément dans une phase et ne s'annule pas non plus instantanément. Il convient de faire un point sur l'influence de L dans le modèle.

Pour un moteur à courant continu, L n'intervient qu'à très haute fréquence (de l'ordre de la fréquence du hacheur, soit environ 20 kHz). Pour modéliser le comportement d'un moteur d'un point de vue de sa vitesse de sortie, L est parfaitement négligeable et le moteur peut être modélisé par un premier ordre, au moins pour les moteurs de faible puissance. Pour modéliser le comportement d'un moteur du point de vue de l'entrée (forme du courant absorbé par le moteur), ou encore pour modéliser le moteur d'un point de vue de la régularité du couple de sortie (harmoniques hautes fréquences du couple, dépendant directement de l'intensité), alors il est indispensable de tenir compte de L.

Si L était nulle, l'intensité serait hachée à l'image de la tension, de même que le couple. Grâce à l'inductance, et si le hacheur est à une fréquence suffisante, l'intensité fluctue peu autour d'une valeur moyenne à l'échelle de temps du hacheur et le couple est régulier.

Pour le moteur BLDC, le raisonnement est similaire. Si on considère que la vitesse de rotation (et donc la fréquence de commutation) est faible devant la fréquence de la modulation PWM, le courant sera relativement constant dans chaque phase de commutation et le comportement globalement similaire à celui d'un moteur CC. Les transitoires de commutation

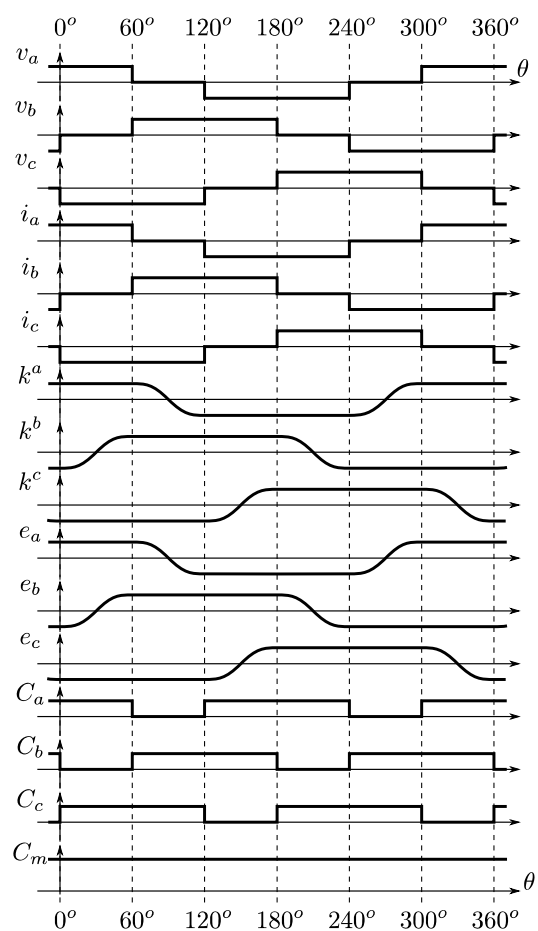


Figure 16: Courbes associées aux grandeurs physiques en fonction de l'angle

étant très courts, ils peuvent être négligés. Si par contre on considère que la vitesse du moteur est très rapide, comparable à la fréquence de la modulation PWM, alors l'établissement des courants dans les bobines va avoir un effet non négligeable dans chaque phase de commutation et il n'est alors plus raisonnable de penser que le comportement commuté des 3 phases est équivalent à un comportement non commuté d'une phase équivalente. Il faut noter que le problème se pose de la même façon pour la commutation par collecteur des bobines d'un moteur CC, mais généralement les moteurs CC n'atteignent jamais des vitesses de l'ordre de 10 000 tr/min.

### 3.2.2 Équation mécanique

Le rotor moteur est soumis aux couples magnétiques générés par les 3 bobinages ainsi qu'au couple extérieur de sortie (défini comme le couple du moteur sur le récepteur, ou encore comme un couple de perturbation  $C_p$ ) et éventuellement un couple de frottement visqueux (qui serait essentiellement dû à la charge entraînée car le moteur lui même présente un frottement très faible en l'absence de balais). En isolant le rotor moteur, le principe fondamental de la dynamique en moment s'écrit :

$$J \frac{d\omega}{dt} = C_a + C_b + C_c - C_p - f \omega$$

Les couples magnétiques se déduisent de l'intensité parcourant la bobine par la constante de couple :

$$C_a = k_t^a(\theta) i_a \quad C_b = k_t^b(\theta) i_b \quad C_c = k_t^c(\theta) i_c$$

Les courbes figure 16 montrent l'évolution des intensités, des constantes de couple et par conséquent des couples de chaque phase.

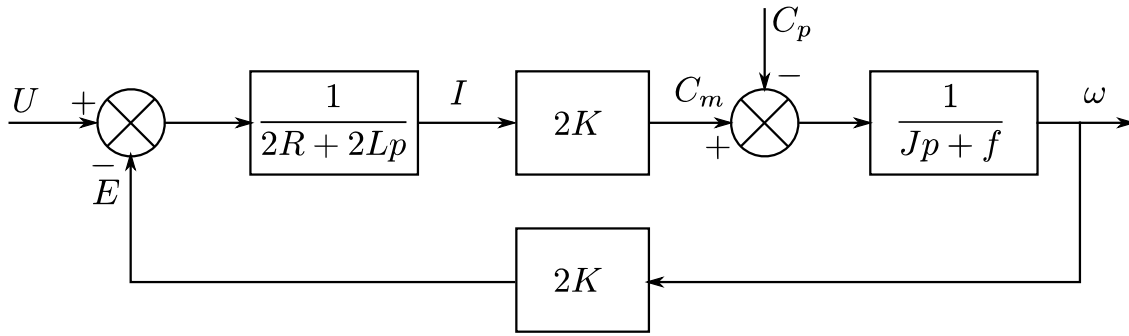
Quelle que soit la phase de commutation, une des intensités est nulle (donc couple nul) et les deux courants des deux autres phases sont opposés, avec des constantes de couple opposées  $K$  et  $-K$ , si bien que l'équation devient :

$$J \frac{d\omega}{dt} = K i + (-K)(-i) + 0 - C_p - f \omega \quad \text{soit} \quad J \frac{d\omega}{dt} = 2 K i - C_p - f \omega$$

Le couple magnétique  $C_m = 2 K i$  est constant au cours de la commutation et vaut le double du couple généré par une phase alimentée. L'équation mécanique est donc similaire à celle d'un moteur à courant continu comme pour l'équation électrique.

### 3.2.3 Modèle équivalent à une machine à courant continu

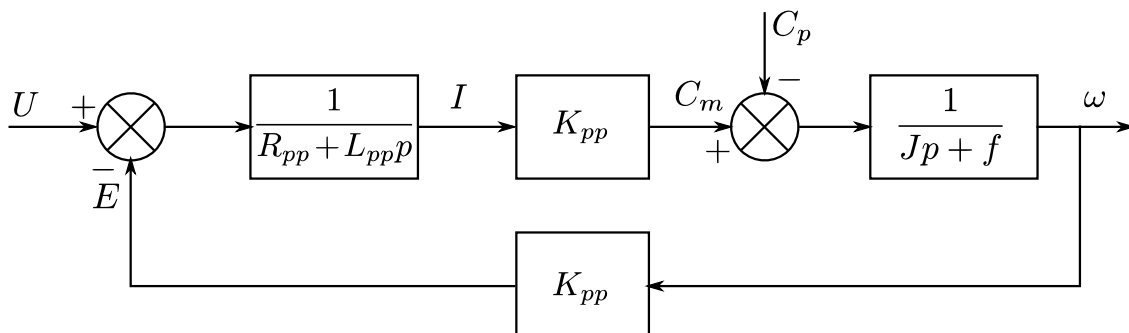
Les transformées de Laplace des équations précédentes peuvent se mettre sous la forme d'un schéma bloc classique de moteur à courant continu, à partir des constantes R, L et K propres à chaque phase séparément.



Il faut néanmoins remarquer que  $R$  est la résistance d'une phase. Sachant que le neutre n'est physiquement pas accessible sur un moteur, lorsqu'on mesure au multimètre la résistance entre deux phases A et B par exemple, la valeur mesurée vaut  $2R$ . De même pour  $L$ , l'inductance vue entre deux phases vaut  $2L$ .

Lorsqu'une mesure de FCEM est réalisée en entraînant le rotor et en mesurant la tension entre deux phases A et B, la valeur mesurée est  $e_a - e_b = K\omega - (-K)\omega = 2K\omega$ .

En notant  $R_{pp}$ ,  $L_{pp}$  et  $K_{pp}$  ces constantes mesurées « phase à phase », on déduit le modèle du moteur BLDC :



### 3.3 Moteur BLDC sans capteurs

Les moteurs BLDC sans capteurs, comme leur nom l'indique, sont dépourvus des capteurs à effet Hall, principalement pour des raisons de coût. Or, pour commander la commutation, il est nécessaire d'extraire une information sur la position du rotor afin de commuter au bon moment.

Pour cela, l'onduleur mesure la tension présente sur la broche non connectée, qui dépend directement de la FCEM puisque le courant est nul. Il est facile de remarquer sur les courbes de  $k^a$ ,  $k^b$  et  $k^c$  figure 16 que le moment où la FCEM coupe zéro est un bon instant de commutation (back EMF zero crossing en anglais).

L'inconvénient notable de cette technique, c'est qu'elle n'est utilisable que lorsque la FCEM est significative, c'est-à-dire lorsque le moteur tourne suffisamment vite. Le moteur ne peut donc a priori pas fonctionner à basse vitesse<sup>4</sup>. Ces moteurs démarrent généralement suivant un cycle en

<sup>4</sup> Des techniques de mesure haute fréquence existent néanmoins pour mesurer la position du

rampe de vitesse (sans mesure, en faisant l'hypothèse qu'il y aura suffisamment peu de couple pour que le rotor suivent le champ magnétique) pendant quelques secondes puis basculent en mode auto-piloté dès que la vitesse est suffisante.

Des mesures de signaux sont réalisés sur ce type de moteur dans le document 2 proposé.

---

rotor sans implantation de capteur et pour une vitesse quelconque. Ces techniques sont actuellement peu répandues.



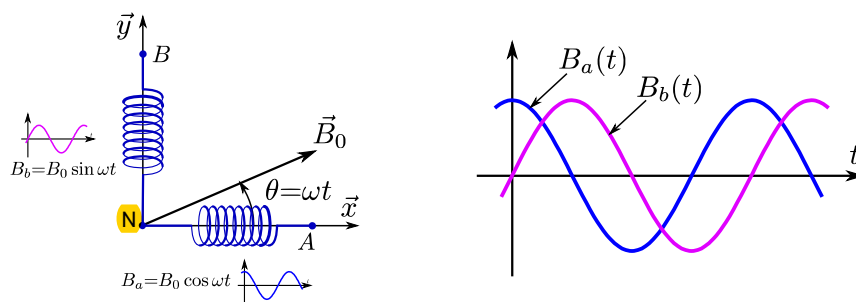
## 4 Modélisation d'un moteur brushless à commande sinusoïdale, en régime stationnaire

### 4.1 Commutation – génération d'une commande sinusoïdale

#### 4.1.1 Principe de la commande sinusoïdale d'un moteur brushless

Une machine synchrone est une machine *triphasee*, c'est-à-dire conçue pour fonctionner sous des *tensions sinusoïdales triphasées*. Comme nous l'avons vue en partie 2.5, le champ magnétique du rotor et le bobinage du stator sont conçus pour obtenir des constantes de couples et de vitesse sinusoïdales en fonction de l'angle, si bien qu'à vitesse constante, les FCEM et les intensités sont sinusoïdales, et nous verrons que le couple est constant (pas d'harmoniques nuisibles).

L'alimentation triphasée consiste en trois tensions sinusoïdales de même amplitude, de même fréquence et déphasées de  $120^\circ$  les unes par rapport aux autres. Nous allons montrer que ces signaux déphasés conduisent à un champ tournant à la fréquence des signaux.



C'est évident pour une machine di-phasée, c'est-à-dire alimentée par deux tensions sinusoïdales déphasées de  $90^\circ$ . Si deux bobines à  $90^\circ$  génèrent deux champs sinusoïdaux  $B_a(t) = B_0 \cos \omega t$  et  $B_b(t) = B_0 \cos(\omega t - 90^\circ) = B_0 \sin \omega t$ , la superposition des deux champs  $\vec{B} = B_a(t)\vec{x} + B_b(t)\vec{y}$  est un champ de norme  $B_0$  et incliné de l'angle  $\omega t$ , c'est-à-dire tournant à la vitesse  $\omega$ .

Nous verrons que c'est aussi vrai pour 3 bobines inclinées à  $120^\circ$  et soumises à 3 tensions sinusoïdales déphasées de  $120^\circ$ , moyennant un coefficient  $3/2$  sur le module du vecteur obtenu.

La commande des trois intensités des bobines permet donc de générer un champ magnétique d'intensité et de direction quelconque. Une mesure précise de la position du rotor (par un synchronrésolver par exemple, et non plus par 3 capteurs à effet Hall) permet de définir une direction de champ statorique environ orthogonale à la direction du champ rotorique, de façon à générer un couple maximal sur le rotor.

#### 4.1.2 Les hypothèses associées au régime sinusoïdal stationnaire

Le caractère sinusoïdal de la plupart de grandeurs permet de décliner des outils théoriques adaptés et de simplifier grandement la modélisation. En particulier, il sera possible d'aboutir à une modélisation équivalente à un moteur CC, comme pour le moteur BLDC, en régime lentement

variable à l'échelle de temps électrique (quasi-statique).

En revanche, cette hypothèse forte ne permet pas au modèle obtenu d'appréhender les régimes transitoires (phases d'accélération) ou les phénomènes de saturation (saturation de tension, saturation magnétique).

En pratique, on considère que le modèle est représentatif en première approximation pour des régimes lentement variables.

### 4.1.3 Mise en œuvre d'une commande sinusoïdale sur micro-contrôleur

La mise en œuvre d'une commande sinusoïdale sur micro-contrôleur est abordée en détail dans le document 3. Dans les grandes lignes, elle nécessite de générer des tensions de commande proportionnelles au sinus de l'angle du rotor (cet angle étant mesuré précisément par un capteur adapté, et non plus par les capteurs à effet Hall).

Ces tensions variables sont générées par PWM, à l'aide de fonctionnalités avancées des timers et comparateurs, assurant une synchronisation des trois signaux de commande, et assurant un temps mort entre la fermeture des interrupteurs et l'ouverture, évitant les situations de court-circuit.

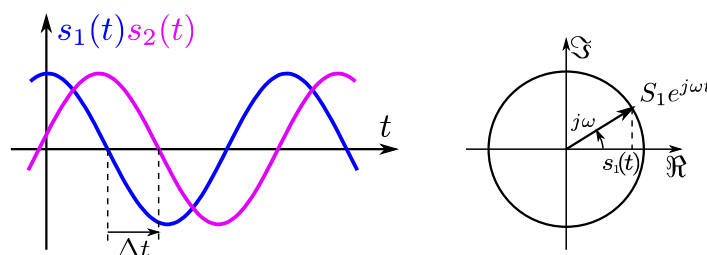
## 4.2 Quelques outils mathématiques bien utiles

### 4.2.1 Les complexes pour décrire les régimes harmoniques

Les régimes harmoniques sont bien représentés par les complexes. Soit  $s_1$  un signal sinusoïdal :

$$s_1(t) = S_1 \cos \omega t = \Re(S_1 e^{j\omega t}) \quad . \quad S_1 \text{ est alors la valeur crête en amplitude de la sinusoïde.}$$

Remarque : classiquement les électro-techniciens utilisent plus généralement la valeur efficace plutôt que la valeur crête dans le diagramme de Fresnel, mais pour la suite de ce document, pour des raisons de simplicité des explications, nous utiliserons la valeurs crête.



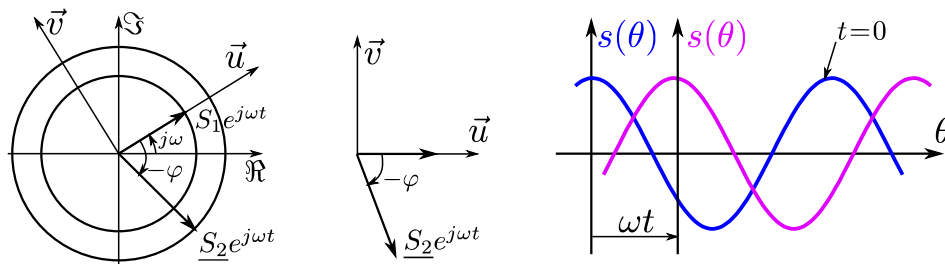
Soit  $s_2$  un second signal sinusoïdal retardé de  $\Delta t$ . Ce retard temporel peut s'interpréter comme un déphasage  $\phi = \omega \Delta t$  :

$$s_2(t) = S_2 \cos[\omega(t - \Delta t)] = S_2 \cos(\omega t - \phi) = \Re(S_2 e^{j(\omega t - \phi)}) = \Re(S_2 e^{-j\phi} e^{j\omega t}) = \Re(\underline{S_2} e^{j\omega t})$$

En notation complexe, le déphasage peut être associé à l'amplitude pour former une *amplitude complexe*  $\underline{S_2} = S_2 e^{-j\phi}$  contenant en un seul facteur les caractéristiques de la sinusoïde (amplitude et phase).

Dans le plan complexe  $(\Re, \Im)$ , les complexes (assimilables à des vecteurs)  $\underline{S}_1$  et  $\underline{S}_2$  tournent à la vitesse  $\omega t$ . Mais dans une « base tournante », c'est-à-dire dans un plan complexe tournant  $(\underline{u}, \underline{v})$ , le diagramme devient fixe ! On ne considère alors que l'amplitude des signaux et leur déphasage. Cette représentation est celle de Fresnel, qui sera utilisée par la suite.

Il faut noter que le fait de se placer dans une « base tournante » dans le plan complexe revient dans le diagramme temporel à se placer dans un référentiel de temps qui se déplace avec l'onde, et dans lequel les sinusoïdes deviennent fixes au cours du temps.

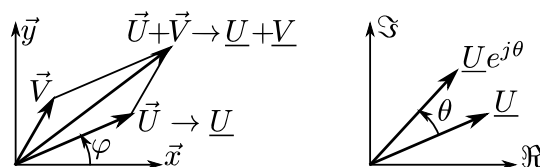


#### 4.2.2 Les complexes pour décrire les vecteurs

Les vecteurs dans un plan sont bien représentés par les complexes. Soit un vecteur  $\vec{U}$  de norme  $\|\vec{U}\|$  et incliné d'un angle  $\varphi$  par rapport à  $\vec{x}$  (coordonnées polaires), il peut être associé au complexe  $\underline{U} = \|\vec{U}\|e^{j\varphi}$ .

Si deux vecteurs  $\vec{U}$  et  $\vec{V}$  sont associés aux complexes  $\underline{U}$  et  $\underline{V}$ , alors :

$$\vec{U} + \vec{V} \rightarrow \underline{U} + \underline{V}$$



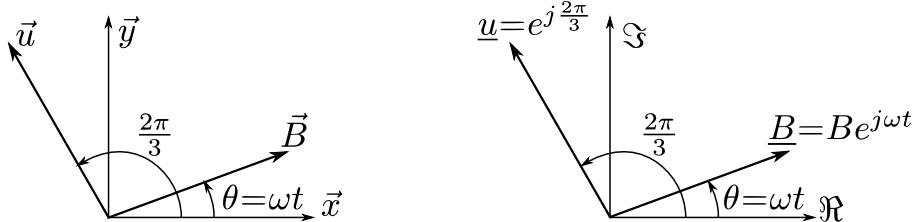
Une rotation d'un angle  $\theta$  du vecteur  $\vec{U}$  consiste à multiplier le complexe  $\underline{U}$  par  $e^{j\theta}$ , soit  $\underline{U}e^{j\theta}$ .

Une machine synchrone est une machine à excitation sinusoïdale, et à répartition spatiale plane des axes des bobines, si bien que le calcul en complexes est idéal pour représenter les grandeurs physiques.

#### 4.2.3 Représentation d'un vecteur tournant

On s'intéresse au cas d'un vecteur tournant. Il s'agit du champ  $\vec{B}$  qui nous intéresse tout particulièrement pour entraîner le rotor, mais le calcul pourrait s'appliquer à n'importe quel vecteur tournant.

$\vec{B}$  présente une évolution spatio-temporelle : il se déplace (il tourne) dans l'espace au cours du temps, le temps et l'espace étant liés par la relation  $\theta = \omega t$ .

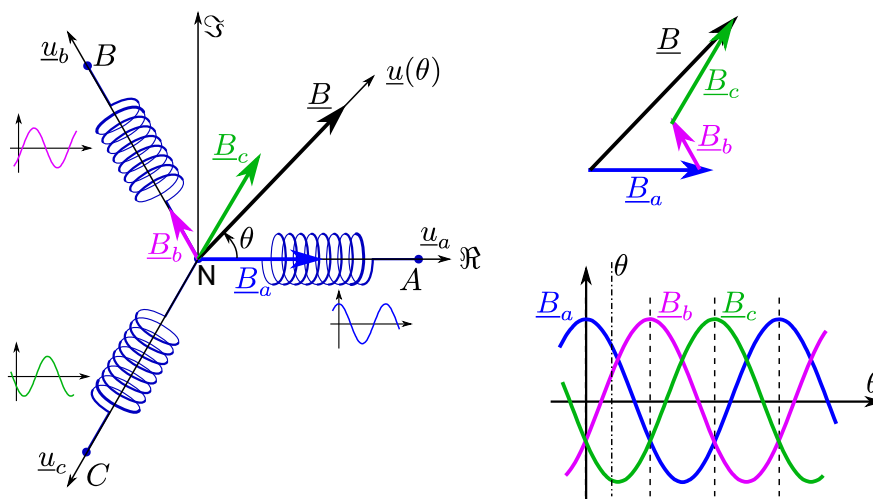


Un champ  $\vec{B}$  tournant se projette sur un axe fixe (  $\vec{x}$  ,  $\vec{y}$  ou tout axe  $\vec{u}$  ) sous forme de sinusoïdes déphasées :

$$\begin{aligned}\vec{B} \cdot \vec{x} &= B \cos \omega t = \Re(B e^{j\omega t}) \\ \vec{B} \cdot \vec{y} &= B \sin \omega t = \Re(B e^{j(\omega t - \pi/2)}) \\ \vec{B} \cdot \vec{u} &= B \cos(\vec{u} \cdot \vec{B}) = B \cos(\theta - 2\pi/3) = \Re(B e^{j(\omega t - 2\pi/3)})\end{aligned}$$

À l'inverse, l'association de deux sinusoïdes déphasées peut générer un champ tournant comme nous l'avons vu avec la machine di-phasée. Dans le cas d'une machine tri-phasée, trois bobines réparties à  $120^\circ$  génèrent trois champs magnétiques sinusoïdaux :

$$\begin{aligned}B_a(t) &= B_0 \cos \omega t = B_0 \frac{e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}}{2} \\ B_b(t) &= B_0 \cos\left(\omega t - \frac{2\pi}{3}\right) = B_0 \frac{e^{j\omega t - j\frac{2\pi}{3}} + e^{-j\omega t + j\frac{2\pi}{3}}}{2} \\ B_c(t) &= B_0 \cos\left(\omega t - \frac{4\pi}{3}\right) = B_0 \frac{e^{j\omega t - j\frac{4\pi}{3}} + e^{-j\omega t + j\frac{4\pi}{3}}}{2}\end{aligned}$$



Ces trois champs sont orientés dans les directions des bobines, représentées par les complexes :

$$\underline{u}_a = 1 \quad \underline{u}_b = e^{j\frac{2\pi}{3}} \quad \underline{u}_c = e^{j\frac{4\pi}{3}}$$

Le champ magnétique total est donc représenté par la somme des 3 complexes :

$$\begin{aligned}
\underline{B}(t) &= B_a(t)\underline{u}_a + B_b(t)\underline{u}_b + B_c(t)\underline{u}_c \\
&= \frac{B_0}{2} \left[ (e^{j\omega t} + e^{-j\omega t})1 + \left( e^{j\omega t - j\frac{2\pi}{3}} + e^{-j\omega t + j\frac{2\pi}{3}} \right) e^{j\frac{2\pi}{3}} + \left( e^{j\omega t - j\frac{4\pi}{3}} + e^{-j\omega t + j\frac{4\pi}{3}} \right) e^{j\frac{4\pi}{3}} \right] \\
&= \frac{B_0}{2} e^{j\omega t} [1+1+1] + \frac{B_0}{2} e^{-j\omega t} \left[ \underbrace{1 + e^{j\frac{2\pi}{3}} + e^{j\frac{4\pi}{3}}}_{=0} \right] \\
&= \frac{3}{2} B_0 e^{j\omega t}
\end{aligned}$$

En considérant que le complexe  $e^{j\omega t}$  est l'image du vecteur tournant  $\vec{u}(\theta)$ , le champ magnétique s'écrit donc  $\vec{B}(t) = \frac{3}{2} B_0 \vec{u}(\theta)$ . Il s'agit d'un vecteur de norme constante et tournant à la vitesse  $\omega$ .

#### 4.2.4 Somme de signaux triphasés

Un autre cas intéressant pour la suite est la somme scalaire de signaux triphasés, comme par exemple les tensions appliquées aux phases :  $v_a(t)$ ,  $v_b(t)$  et  $v_c(t)$ . Ces signaux ont même amplitude et sont déphasés de  $\frac{2\pi}{3}$  :

$$v_a(t) = V \cos \omega t \quad v_b(t) = V \cos \left( \omega t - \frac{2\pi}{3} \right) \quad v_c(t) = V \cos \left( \omega t - \frac{4\pi}{3} \right)$$

La somme de ces trois signaux peut s'écrire :

$$\begin{aligned}
v_a(t) + v_b(t) + v_c(t) &= V \left[ \cos \omega t + \cos \left( \omega t - \frac{2\pi}{3} \right) + \cos \left( \omega t - \frac{4\pi}{3} \right) \right] \\
&= V \Re \left[ e^{j\omega t} + e^{j\omega t - j\frac{2\pi}{3}} + e^{j\omega t - j\frac{4\pi}{3}} \right] \\
&= V \Re \left[ \underbrace{1 + e^{j\frac{2\pi}{3}} + e^{j\frac{4\pi}{3}}}_{=0} \right] \\
&= 0
\end{aligned}$$

La somme scalaire de trois signaux triphasés déphasés de  $120^\circ$  est nulle.

### 4.3 Mise en équations du modèle

#### 4.3.1 Équations électriques

Dans une machine synchrone sinusoïdale, non saturée, équilibrée en régime stationnaire, le neutre N est au potentiel nul<sup>5</sup>. Ce n'est pas nécessairement le cas dans les situations transitoires.

Cette affirmation se démontre assez facilement en considérant le modèle électrique des trois

---

<sup>5</sup> En considérant que les tensions sinusoïdales appliquées aux phases sont centrées sur zéro, ce qui est le cas dans les calculs qui suivront. Néanmoins, les signaux ne sont jamais dans les potentiels négatifs : ils oscillent entre  $U_{alim}$  et 0 V, si bien que le potentiel du neutre est en réalité à la tension moyenne  $U_{alim}/2$  par rapport à la masse de l'alimentation.

phases de la figure de gauche.

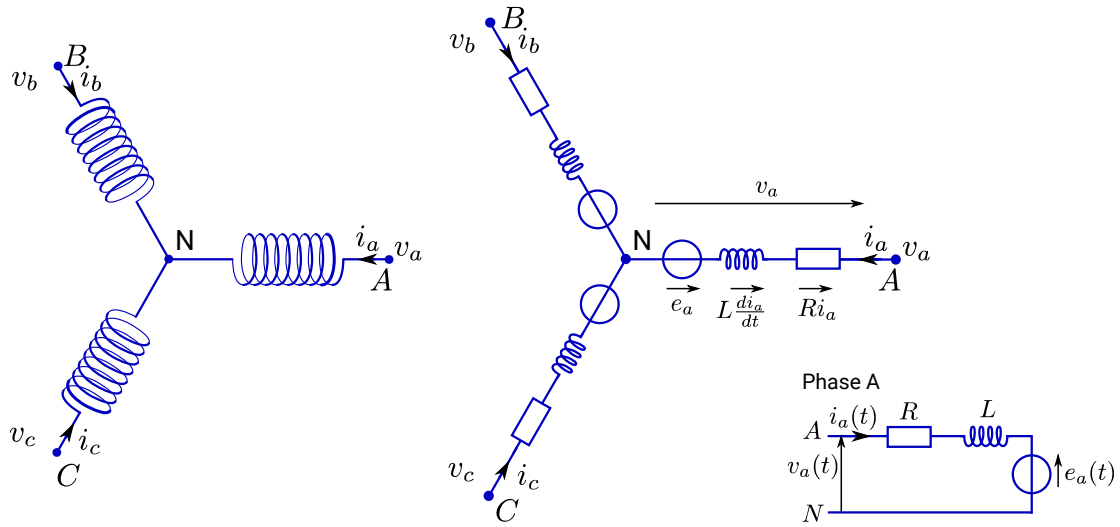


Figure 17: Modélisation électrique du moteur sinusoïdal

En écrivant la loi des mailles<sup>6</sup> aux trois branches de l'étoile :

$$v_a - v_N = R i_a + L \frac{di_a}{dt} + k^a(\theta) \omega$$

$$v_b - v_N = R i_b + L \frac{di_b}{dt} + k^b(\theta) \omega$$

$$v_c - v_N = R i_c + L \frac{di_c}{dt} + k^c(\theta) \omega$$

La loi des nœuds impose  $i_a + i_b + i_c = 0$

En sommant les trois lois des mailles, la loi des nœuds apporte de grandes simplifications :

$$V_a + V_b + V_c - 3 V_N = R \times 0 + L \frac{d0}{dt} + (k_e^a(\theta) + k_e^b(\theta) + k_e^c(\theta)) \omega$$

Or, les tensions  $V_i$  sont sinusoïdales déphasées de  $120^\circ$  donc leur somme est nulle. Il en est de même pour la somme des  $k_e^i(\theta)$ . On retrouve donc bien  $v_N = 0$ .

En considérant que le neutre est au potentiel nul, chaque phase peut être étudiée séparément, sous la forme du schéma figure 17 à droite pour la phase A ; les phases B et C sont identiques.

Les trois phases sont identiques et les signaux ( $v_i$ ,  $i_i$ ,  $e_i$ ) sont identiques à un déphasage de  $120^\circ$  près.

Par ailleurs, les signaux sont sinusoïdaux, et peuvent se décrire dans le plan complexe sous la forme d'un complexe dont la norme vaut l'amplitude de la sinusoïde et la phase vaut le déphasage.

Ainsi, en prenant comme origine des phases la force contre-électromotrice (directement liée au rotor) :

<sup>6</sup> Comme dans le chapitre précédent, l'inductance  $L$  considérée ici est une inductance synchrone, intégrant la participation des mutuelles inductances. L'expression de  $L$  est détaillée ci-après.

$$\begin{aligned}
e_a(t) &= \Re(E e^{j\omega t}) \\
v_a(t) &= \Re(\underline{V} e^{j\omega t}) = \Re(V e^{j\phi} e^{j\omega t}) \\
i_a(t) &= \Re(\underline{I} e^{j\omega t}) = \Re(I e^{j\mu} e^{j\omega t})
\end{aligned}$$

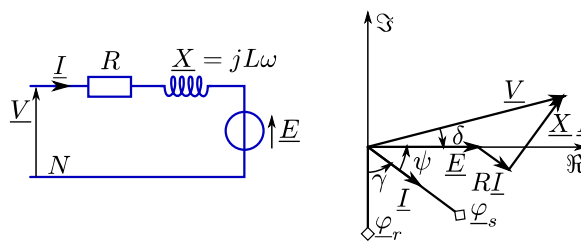
De même pour les phases B et C :  $v_b(t) = \Re(\underline{V} e^{j(\omega t - \frac{2\pi}{3})})$  et  $v_c(t) = \Re(\underline{V} e^{j(\omega t - \frac{4\pi}{3})})$

La loi des mailles pour la phase A s'écrit alors :

$$\underline{V} e^{j\omega t} = R \underline{I} e^{j\omega t} + L \frac{d}{dt}(\underline{I} e^{j\omega t}) + \underline{E} e^{j\omega t}, \text{ soit } \underline{V} e^{j\omega t} = R \underline{I} e^{j\omega t} + jL\omega \underline{I} e^{j\omega t} + \underline{E} e^{j\omega t}$$

En éliminant  $e^{j\omega t}$ , l'équation devient  $\underline{V} = R \underline{I} + jL\omega \underline{I} + \underline{E}$ . On obtient strictement la même équation en appliquant le raisonnement aux phases B et C.

On remarque que si les signaux  $v_a$ ,  $v_b$  et  $v_c$  ne sont pas égaux (ils sont déphasés), la grandeur complexe  $\underline{V}$  est commune aux trois signaux, de même que  $\underline{I}$  et  $\underline{E}$ . Cette observation conduit à la notion de *phase équivalente*, représentée en utilisant les grandeurs complexes communes aux trois phases :



Attention, sur le modèle à une phase équivalente, ce ne sont plus des signaux temporels mais des complexes traduisant les amplitudes et déphasages des signaux temporels. La grandeur  $\underline{X} = jL\omega$  est appelée *réactance synchrone*.

Les vecteurs complexes  $\underline{V}$ ,  $\underline{I}$ ,  $\underline{E}$ , ainsi que les tensions  $R\underline{I}$  et  $jL\omega \underline{I} = \underline{X}\underline{I}$  peuvent se tracer dans le plan complexe : c'est le diagramme de Fresnel, qui sera approfondi par la suite.

#### Remarque sur l'inductance synchrone $L$

L'équation électrique précédente est en réalité simplifiée car les bobines  $a$ ,  $b$  et  $c$  sont couplées par des mutuelles inductances  $M_{ab} = M_{bc} = M_{ac}$ . L'inductance  $L$  prise en compte est en réalité une inductance équivalente prenant en compte l'inductance propre  $L_a = L_b = L_c$  des bobines et des mutuelles inductances  $M_{ab}$ . L'équation électrique exacte est la suivante :

$$v_a - v_N = R i_a + L_a \frac{di_a}{dt} + M_{ab} \frac{di_b}{dt} + M_{ac} \frac{di_c}{dt} + k^a(\theta) \omega$$

La mutuelle inductance est liée à l'inductance propre : les bobines ont le même nombre de spires et elles sont inclinées entre elles d'un angle de  $120^\circ$ . La géométrie des armatures guidant le champ magnétique influe sur l'expression de la mutuelle inductance mais on peut en première approximation considérer que  $M_{ab} = M_{ba} = L_a \cos 120^\circ = -L_a/2$ .

Sachant d'après la loi des nœuds en N que  $i_a + i_b + i_c = 0 \Rightarrow i_a = -i_b - i_c$ , l'équation électrique devient :

$$v_a - v_N = R i_a + (L_a - M_{ab}) \frac{di_a}{dt} + k^a(\theta) \omega \Rightarrow v_a - v_N = R i_a + (3L_a/2) \frac{di_a}{dt} + k^a(\theta) \omega$$

En posant  $L = 3L_a/2$ , on retrouve l'équation précédente :  $v_a - v_N = R i_a + L \frac{di_a}{dt} + k^a(\theta) \omega$

### 4.3.2 Équation mécanique

Le rotor moteur est soumis aux couples magnétiques  $C_m(t)$  générés par les 3 bobinages ainsi qu'au couple extérieur de sortie (défini comme le couple du moteur sur le récepteur, ou encore comme un couple de perturbation  $C_p$ ) et éventuellement un couple de frottement visqueux (qui serait essentiellement dû à la charge entraînée car le moteur lui-même présente un frottement très faible en l'absence de balais). En isolant le rotor moteur, le principe fondamental de la dynamique en moment s'écrit :

$$J \frac{d\omega}{dt} = C_m - C_p - f \omega \quad \text{avec} \quad C_m = C_a + C_b + C_c$$

Les couples magnétiques se déduisent de l'intensité parcourant la bobine par les constante de couple (fonctions sinusoïdales) :

$$C_a = k_t^a(\theta) i_a = K \cos \theta i_a \quad C_b = k_t^b(\theta) i_b = K \cos \left( \theta - \frac{2\pi}{3} \right) i_b \quad C_c = k_t^c(\theta) i_c = K \cos \left( \theta - \frac{4\pi}{3} \right) i_c$$

Les intensités elles-mêmes sont sinusoïdales :

$$\begin{aligned} i_a(t) &= \Re \left( \underline{I} e^{j\omega t} \right) = \Re \left( I e^{j\psi} e^{j\omega t} \right) = I \cos(\omega t + \psi) \\ i_b(t) &= \Re \left( \underline{I} e^{j(\omega t - \frac{2\pi}{3})} \right) = \Re \left( I e^{j\psi} e^{j(\omega t - \frac{2\pi}{3})} \right) = I \cos(\omega t + \psi - \frac{2\pi}{3}) \\ i_c(t) &= \Re \left( \underline{I} e^{j(\omega t - \frac{4\pi}{3})} \right) = \Re \left( I e^{j\psi} e^{j(\omega t - \frac{4\pi}{3})} \right) = I \cos(\omega t + \psi - \frac{4\pi}{3}) \end{aligned}$$

L'angle  $\psi$  est un angle qui dépend de la commande de l'onduleur. Nous reviendrons sur cet angle dans la partie suivante.

Le couple  $C_m(t)$  s'écrit alors :

$$C_m(t) = K \cos \theta I \cos(\theta - \psi) + K \cos \left( \theta - \frac{2\pi}{3} \right) I \cos \left( \theta - \psi - \frac{2\pi}{3} \right) + K \cos \left( \theta - \frac{4\pi}{3} \right) I \cos \left( \theta - \psi - \frac{4\pi}{3} \right)$$

Sachant que  $\cos a \cos b = \frac{1}{2} (\cos(a+b) + \cos(a-b))$ , le couple devient :

$$C_m(t) = \frac{KI}{2} \left[ \cos(2\theta - \psi) + \cos(\psi) + \cos \left( 2\theta - \psi - \frac{4\pi}{3} \right) + \cos(\psi) + \cos \left( 2\theta - \psi - \frac{8\pi}{3} \right) + \cos(\psi) \right]$$



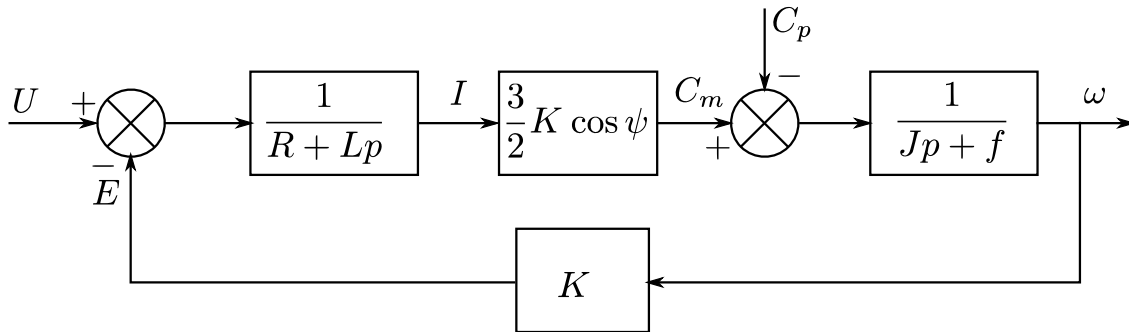
La somme de cosinus déphasés de  $120^\circ$  étant nulle, l'expression se simplifie :

$$C_m(t) = \frac{3}{2} K I \cos \psi$$

En régime stationnaire, l'angle  $\psi$  reste constant donc le couple est constant au cours du temps.

#### 4.3.3 Modèle équivalent en régime lentement variable

Les transformées de Laplace des équations précédentes peuvent se mettre sous la forme d'un schéma bloc classique de moteur à courant continu, à partir des constantes  $R$ ,  $L$  et  $K$  propres à chaque phase séparément.



Les valeurs de  $U$ ,  $E$  et  $I$  correspondent dans ce schéma aux amplitudes de la tension, de la FCEM et de l'intensité pour une phase (sachant qu'elles sont identiques dans les 3 phases). En particulier, le courant total consommé correspond au triple du courant circulant dans une phase. Le couple  $C_m$  par contre correspond à la somme des participations des 3 phases.

Il faut néanmoins remarquer que  $R$  est la résistance d'une phase. Lorsqu'on mesure au multimètre la résistance entre deux phases A et B sur un moteur couplé en étoile par exemple, la valeur mesurée vaut  $2R$ . De même pour  $L$ , l'inductance vue entre deux phases vaut  $2L$ .

Lorsqu'une mesure de FCEM est réalisée en entraînant le rotor et en mesurant la tension entre deux phases A et B, la valeur mesurée est  $e_a - e_b = K\omega - (-K)\omega = 2K\omega$ .

## 4.4 Diagramme de Fresnel

Le diagramme de Fresnel est une représentation dans le plan complexe des grandeurs sinusoïdales, dans un référentiel attaché au rotor de façon à ce que les vecteurs soient fixes et non pas tournants.

Pour rappel, la loi des mailles appliquée à la phase A s'écrit sous une forme complexe :

$$\underline{V}e^{j\omega t} = R\underline{I}e^{j\omega t} + L \frac{d}{dt}(\underline{I}e^{j\omega t}) + Ee^{j\omega t}, \text{ soit } \underline{V}e^{j\omega t} = R\underline{I}e^{j\omega t} + jL\omega \underline{I}e^{j\omega t} + Ee^{j\omega t}$$

On retrouve les expressions temporelles sinusoïdales des grandeurs en prenant la partie réelle des expressions complexes. Le facteur  $e^{j\omega t}$  traduit la rotation des vecteurs à la vitesse du rotor.

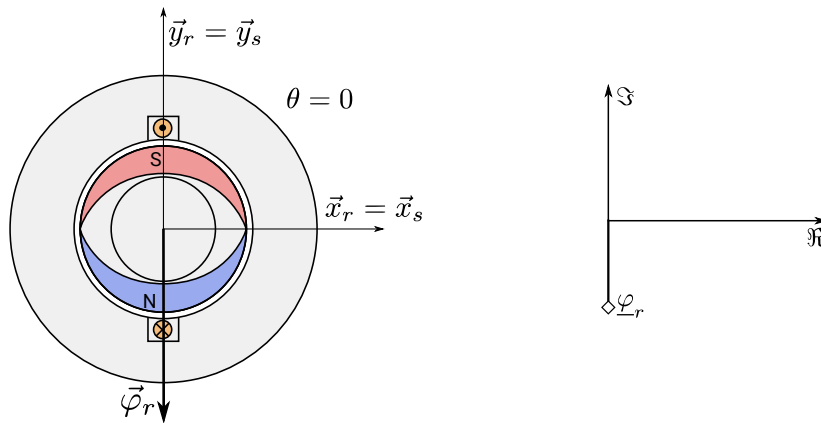
En divisant par  $e^{j\omega t}$ , on applique l'équivalent d'un changement de référentiel pour se placer sur le rotor. L'équation devient  $\underline{V} = R \underline{I} + jL \omega \underline{I} + \underline{E}$  et les vecteurs sont fixes.

Lors du changement de référentiel, il est possible de choisir un axe  $\vec{x}$  de référence quelconque sur le rotor. L'équation précédente montre que le choix de  $\vec{x}$  s'est fait dans la direction de  $\vec{E}$  car il s'agit de la seule grandeur réelle de l'équation. Mais il aurait été possible de faire un autre choix, comme la direction de  $\vec{V}$  par exemple.

Le choix s'est porté sur  $\vec{E}$  dans la suite du paragraphe car  $\vec{E}$  est porté par une direction privilégiée du rotor comme nous allons le voir.

#### 4.4.1 Construction du diagramme de Fresnel

Nous allons commencer le diagramme de Fresnel en s'appuyant sur la caractéristique forte du rotor : l'orientation du champ magnétique, et donc le vecteur flux  $\underline{\phi}_r$  orienté du sud vers le nord. Ce flux magnétique sera arbitrairement placé suivant  $-\vec{y}$ , ou encore dans la direction des imaginaires négatifs :  $\underline{\phi}_r = -j \phi_r = \phi_r e^{-j\pi/2}$ .



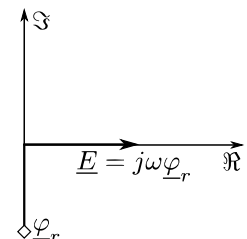
La force contre-électromotrice est la dérivée du flux :  $\underline{E} = \frac{d\phi_r}{dt}$ . Or, la dérivée d'une grandeur dans le référentiel du stator conduit à une rotation de  $\pi/2$ . Prenons l'exemple du flux à travers la bobine A : la grandeur temporelle s'écrit :

$$\phi_r^a(t) = \phi_r \cos(\omega t - \pi/2) = \Re(\phi_r e^{j(\omega t - \pi/2)}) = \Re(\underline{\phi}_r e^{j\omega t})$$

On retrouve bien lorsque l'angle vaut  $\pi/2$  la situation de flux maximal.

La force contre-électromotrice s'écrit alors comme la dérivée du flux :

$$e_a(t) = \frac{d\phi_a}{dt}(t) = \Re\left(\frac{d\underline{\phi}_r e^{j\omega t}}{dt}(t)\right) = \Re(j\omega \underline{\phi}_r e^{j\omega t}) = \Re(\underline{E} e^{j\omega t})$$

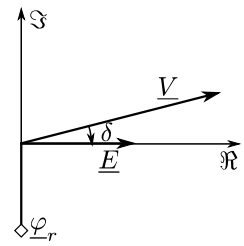


La grandeur complexe s'écrit donc  $\underline{E} = j\omega \underline{\phi}_r$ . Le facteur  $j\omega$  traduit la dérivation temporelle. La multiplication par  $j$  revient à multiplier par  $e^{j\pi/2}$ , c'est-à-dire à appliquer une rotation de  $\pi/2$ . Comme en cinématique, la dérivée d'un vecteur tournant

conduit à une rotation de  $\pi/2$  !

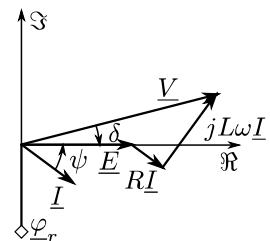
Le vecteur  $\underline{E}$  est donc issu de la rotation de  $\underline{\varphi_r}$  de  $\pi/2$  : il est dans l'axe des réels (axe  $\Re$ ).

Les autres grandeurs dépendent de la sollicitation du stator, c'est-à-dire des grandeurs électriques. La seule grandeur imposée en entrée du moteur par l'onduleur est la tension  $\underline{V}$ . Cette tension peut être positionnée arbitrairement par l'onduleur. Elle est placée avec un angle  $-\delta$  par rapport à  $\vec{x}$  qui dépendra de la commande du moteur.

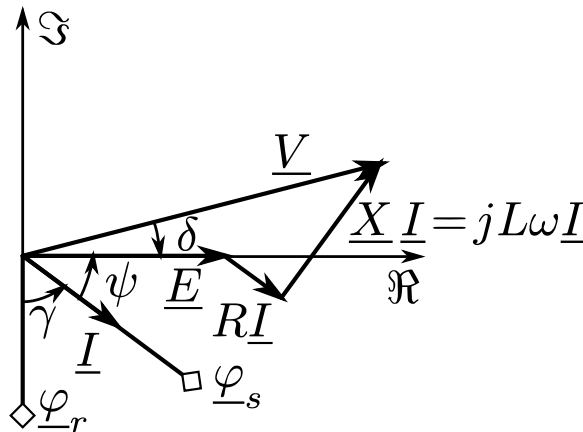


Suite à la tension  $\underline{V}$  et à la force contre-électromotrice dans le circuit électrique, une intensité  $\underline{I}$  va s'établir, respectant la loi des mailles :  $\underline{V} = R\underline{I} + jL\omega\underline{I} + \underline{E}$ . On remarque à nouveau la tension aux bornes de la bobine  $L\frac{di}{dt}(t)$  où la dérivation temporelle se traduit dans l'expression complexe par une multiplication par  $j\omega$ . Ce n'est pas sans rappeler les transformées de Laplace en régime harmonique.

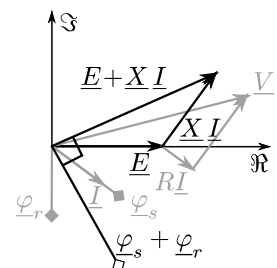
Le vecteur  $jL\omega\underline{I}$  est donc orthogonal à  $\underline{I}$  et le diagramme de Fresnel se complète sur la figure ci-contre. L'angle  $\psi$  est issu du bon respect de la relation vectorielle traduite par la loi des mailles. Il n'est pas choisi arbitrairement.



Le flux magnétique généré par une bobine du stator est directement proportionnel à  $\underline{I}$ , suivant  $\vec{x}$  pour la bobine A qui sert de référence à  $\omega t = \theta = 0$ . Ainsi, le flux magnétique  $\underline{\varphi_s}$  généré par le stator est représenté par un vecteur proportionnel à  $\underline{I}$ .



L'angle  $\gamma$  traduit l'angle entre le champ magnétique du stator et le champ magnétique du rotor. Le rotor tend à s'aligner avec le champ magnétique du stator et c'est ce qui crée le couple moteur. Le couple magnétique dépend donc directement de  $\gamma$  ; il est maximum lorsque  $\gamma = \pi/2$ . On dit que la machine est autopilotée lorsque la commande maintient cet angle à  $\pi/2$ .



Remarque : en excluant les phénomènes de dissipation (effet Joule), la somme des tensions  $\underline{E} + \underline{X}\underline{I}$  est directement issue de la dérivée de la somme des flux statorique et rotorique  $\underline{\phi}_r + \underline{\phi}_s$ , représenté par l'angle droit sur la figure ci-contre.

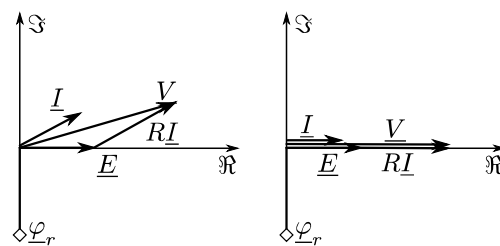
#### 4.4.2 Description de quelques régimes de fonctionnement

Le précédent diagramme de Fresnel décrit une situation quelconque de fonctionnement. Nous allons maintenant aborder des cas particuliers, à basse ou haute vitesse, en charge ou à vide, pour illustrer la modification du diagramme.

Le pilotage de la machine synchrone conduit à mesurer la position du rotor et imposer une tension telle qu'il est possible de choisir l'angle  $\gamma$ .

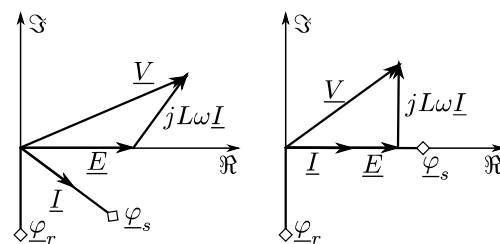
##### Situation à basse vitesse

Si  $\omega \ll R/L$ , alors  $L\omega\underline{I}$  devient négligeable devant  $R\underline{I}$ . Le tracé pour un angle  $\gamma$  quelconque correspond à la figure de gauche. Pour assurer un couple maximal, il convient d'assurer une intensité orthogonale au champ magnétique du rotor, c'est-à-dire orientée suivant l'axe  $\vec{x}$  des réels. Dans cette situation, il suffit de commander l'onduleur pour assurer une tension  $\underline{V}$  suivant  $\vec{x}$ .



##### Situation à haute vitesse

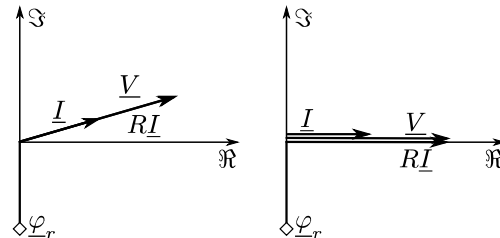
Si  $\omega \gg R/L$ , alors  $R\underline{I}$  devient négligeable devant  $L\omega\underline{I}$ . Le tracé pour un angle  $\phi$  quelconque correspond à la figure de gauche. Pour assurer un couple maximal, il convient d'assurer une intensité orientée suivant l'axe  $\vec{x}$  des réels. Le vecteur  $jL\omega\underline{I} = \underline{X}\underline{I}$  dépend de la vitesse de rotation et de l'intensité si bien qu'il n'y a pas de solution simple pour positionner  $\underline{I}$  suivant  $\vec{x}$ . Le seul moyen est d'asservir le courant : il faut mesurer l'intensité dans chaque phase, en déduire l'angle  $\psi$  et ajuster  $\underline{V}$  pour ramener  $\underline{I}$  suivant  $\vec{x}$ .



### Situation à l'arrêt et sous charge

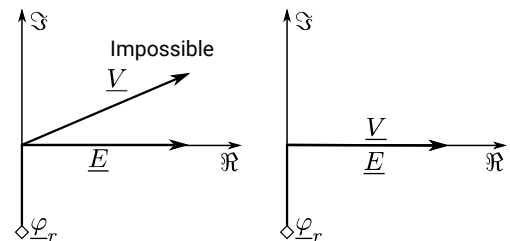
Dans cette situation d'arrêt (ou de vitesse très lente),  $\omega = 0$  si bien que  $\underline{E} = 0$  et  $jL\omega \underline{I} = 0$ .

L'intensité va alors naturellement s'aligner avec la tension de commande (figure de gauche). Pour assurer un couple maximal, il suffit de commander l'onduleur pour assurer une tension  $\underline{V}$  suivant  $\vec{x}$ .



### Situation à vide (couple nul)

Lorsque le couple est nul, l'intensité est nulle. Il n'est pas possible d'avoir une situation où  $\delta$  est non nul. Le rotor s'aligne naturellement orthogonalement à la tension  $\underline{V}$ , assurant un alignement entre  $\underline{E}$  et  $\underline{V}$ . Si la partie commande impose un angle  $\delta$  non nul, un couple non nul apparaîtra et conduira à une accélération.



## Conclusion

Les moteurs brushless deviennent incontournables dans les systèmes modernes. Les professeurs de SII ont tout intérêt à acquérir une compréhension raisonnable du fonctionnement et de la modélisation de cet actionneur. Ce document aura permis de parcourir un tour d'horizon des outils classiques pour l'électro-technicien et des modèles élémentaires permettant de simuler le comportement du moteur, avec pour seul objectif d'asseoir les fondamentaux pour qu'un « non spécialiste » puisse discuter avec un spécialiste du domaine. Il n'a pas vocation à être exhaustif sur les phénomènes à prendre en compte pour dimensionner une machine.

Si vous remarquez des erreurs ou des imprécisions, n'hésitez pas à me le signaler en m'envoyant un mail à l'adresse [marc.derumaux@gmail.com](mailto:marc.derumaux@gmail.com).

## Table des matières

Introduction.....	1
1Principe de fonctionnement des moteurs brushless.....	2
2Modélisation des phénomènes magnétiques.....	3
2.1Le champ magnétique et ses propriétés.....	3
2.2Aimants et bobines.....	5
2.3L'induction magnétique.....	8
2.3.1L'auto-induction d'une seule bobine.....	8
2.3.2Mutuelle induction entre deux bobines.....	9
2.4Les constantes de vitesse et de couple dans un BLDC.....	10
2.4.1Constante de vitesse.....	12
2.4.2Constante de couple.....	13
2.5Les constantes de vitesse et de couple dans une machine synchrone sinusoïdale.....	14
2.5.1Constante de vitesse.....	14
2.5.2Constante de couple.....	15
3Modélisation d'un moteur BLDC.....	16
3.1La commutation.....	16
3.1.1La commande logique.....	16
3.1.2Contrôler le niveau de tension appliqué au moteur.....	17
3.1.3Mise en œuvre d'une commande de BLDC sur micro-contrôleur.....	17
3.2Mise en équations du modèle.....	18
3.2.1Équations électriques.....	18
3.2.2Équation mécanique.....	20
3.2.3Modèle équivalent à une machine à courant continu.....	21
3.3Moteur BLCD sans capteurs.....	21
4Modélisation d'un moteur brushless à commande sinusoïdale, en régime stationnaire.....	21
4.1Commutation – génération d'une commande sinusoïdale.....	22
4.1.1Principe de la commande sinusoïdale d'un moteur brushless.....	22
4.1.2Les hypothèses associées au régime sinusoïdal stationnaire.....	22
4.1.3Mise en œuvre d'une commande sinusoïdale sur micro-contrôleur.....	22
4.2Quelques outils mathématiques bien utiles.....	23
4.2.1Les complexes pour décrire les régimes harmoniques.....	23
4.2.2Les complexes pour décrire les vecteurs.....	23
4.2.3Représentation d'un vecteur tournant.....	24
4.2.4Somme de signaux triphasés.....	25
4.3Mise en équations du modèle.....	26
4.3.1Équations électriques.....	26
4.3.2Équation mécanique.....	27
4.3.3Modèle équivalent à une machine à courant continu.....	28
4.4Diagramme de Fresnel.....	29
4.4.1Construction du diagramme de Fresnel.....	29
4.4.2Description de quelques régimes de fonctionnement.....	31